26-27

GRADO EN MATEMÁTICAS
CUARTO CURSO

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA

INTEGRAL DE LEBESGUE

CÓDIGO 6102401-

UNED

26-27

INTEGRAL DE LEBESGUE

CÓDIGO 6102401-

ÍNDICE

NOMBRE DE LA ASIGNATURA	INTEGRAL DE LEBESGUE
CÓDIGO	6102401-
CURSO ACADÉMICO	2026/2027
DEPARTAMENTO	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES
TÍTULO EN QUE SE IMPARTE	GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO	CUARTO CURSO
PERIODO	SEMESTRE 1
Nº ETCS	5
HORAS	125.0
IDIOMAS EN QUE SE IMPARTE	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

La asignatura Integral de Lebesgue tiene como objetivo introducir de manera rigurosa una de las construcciones fundamentales del Análisis Matemático moderno: la integral de Lebesgue y el marco de teoría de la medida en el que esta se desarrolla. Se trata de una teoría central no solo por su valor intrínseco, sino también porque proporciona el lenguaje y las herramientas adecuadas para una gran parte del análisis contemporáneo.

En el plan de estudios del Grado en Matemáticas, esta asignatura figura como optativa del primer semestre del cuarto curso y tiene asignados 5 créditos ECTS. Por su posición dentro del grado, presupone una cierta madurez matemática y permite al estudiante entrar en contacto con una teoría que sirve de base a desarrollos posteriores tanto en análisis real como en otras áreas afines.

La noción de integral resulta intuitiva en el caso de funciones continuas y positivas definidas sobre un intervalo cerrado, donde puede interpretarse geométricamente como el área bajo la curva. Sin embargo, esa intuición deja de ser suficiente cuando se consideran funciones con discontinuidades abundantes, límites de sucesiones de funciones o espacios de funciones más generales. La teoría de Lebesgue surge precisamente para superar estas limitaciones y para proporcionar una noción de integración más flexible, más robusta y mejor adaptada a las necesidades del análisis.

Una de las ideas esenciales del curso es que, para integrar funciones suficientemente generales, no basta con refinar la noción clásica de suma; es necesario introducir antes una teoría adecuada de la medida. De este modo, la asignatura desarrolla progresivamente las nociones de clase de conjuntos, medida, medida exterior, función medible e integral, hasta llegar a algunos de los resultados fundamentales de la teoría, como los teoremas clásicos de convergencia, los teoremas de Fubini y Tonelli, el estudio de los espacios L^p y el teorema de Radon-Nikodym.

La importancia de esta teoría va mucho más allá del problema concreto de integrar funciones “más generales” que las integrables en el sentido de Riemann. La integral de Lebesgue es una herramienta esencial en el estudio de series y transformadas de Fourier, en probabilidad, en ecuaciones en derivadas parciales, en análisis funcional y en muchas otras partes de la matemática. En este sentido, la asignatura constituye una auténtica puerta de entrada a la teoría de la medida y a varios de los marcos fundamentales del análisis moderno.

Aunque el programa de la asignatura es necesariamente amplio, el objetivo del curso no es agotar todos los aspectos técnicos y generales de la teoría de la medida, sino ofrecer una primera introducción sólida a sus conceptos, ejemplos y resultados principales. El énfasis recaerá en la comprensión de las definiciones, en el manejo de ejemplos y contraejemplos, en la demostración de los teoremas fundamentales y en la capacidad de aplicar la teoría a situaciones concretas.

Por todo ello, Integral de Lebesgue ocupa un lugar especialmente relevante en la formación del estudiante interesado en el Análisis Matemático. La asignatura permite comprender con profundidad una de las construcciones más influyentes de la matemática del siglo XX y proporciona herramientas conceptuales indispensables para estudios posteriores, tanto en el grado como en cursos más avanzados.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Para cursar con aprovechamiento esta asignatura es conveniente que el estudiante haya adquirido una base sólida en Análisis Matemático y en Álgebra Lineal. En particular, resulta muy recomendable manejar con soltura nociones relativas a sucesiones y series de funciones, continuidad, convergencia, compacidad, funciones de varias variables, integral de Riemann y propiedades básicas de los espacios vectoriales.

También es importante estar familiarizado con el lenguaje matemático propio de las demostraciones y con el manejo riguroso de cuantificadores, desigualdades y argumentos por aproximación. A lo largo del curso aparecerán con frecuencia familias numerables de conjuntos, supremos e ínfimos, límites de sucesiones de funciones y construcciones abstractas que exigen cierta madurez matemática.

Aunque la asignatura constituye una primera introducción sistemática a la teoría de la medida y a la integral de Lebesgue, no debe abordarse como una simple ampliación técnica de la integral de Riemann. Se trata de una teoría nueva, con conceptos y métodos propios, por lo que conviene estudiar la materia de forma progresiva y con especial atención a las definiciones, a los ejemplos y a las demostraciones de los resultados fundamentales.

Se recomienda asimismo seguir la asignatura de manera continuada desde el comienzo del curso. La comprensión de los temas iniciales —clases de conjuntos, medidas, funciones medibles— es esencial para poder avanzar con seguridad hacia los teoremas de convergencia, los productos de medidas, los espacios Lp y los resultados finales del programa.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	JORGE LOPEZ ABAD (Coordinador/a de asignatura)
Correo Electrónico	abad@mat.uned.es
Teléfono	91398-7234
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Equipo docente de la asignatura (desde este curso):
Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo
Despacho 118
Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias de la UNED
Paseo Senda del Rey, 9
28040-Madrid
Horario de atención al alumno:
Jueves lectivos de 16:00 a 20:00.
Teléfono: 91-3987226
Correo electrónico:
ffernan@mat.uned.es
(Es preferible utilizar el correo electrónico del curso virtual, o el foro, o el teléfono).
La tutorización y seguimiento se llevará a cabo en las guardias (para las cuales, el horario es el antes indicado), y también en el foro de la asignatura del curso virtual. En este foro, las preguntas y respuestas son visibles para todos los alumnos, y también se da la oportunidad de que todos participen en los debates o conversaciones.

TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

En el enlace que aparece a continuación se muestran los centros asociados y extensiones en las que se imparten tutorías de la asignatura. Estas pueden ser:

- **Tutorías de centro o presenciales**: se puede asistir físicamente en un aula o despacho del centro asociado.
- **Tutorías campus/intercampus**: se puede acceder vía internet.

Consultar horarios de tutorización de la asignatura 6102401-

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

COMPETENCIAS GENERALES

CG4 - Análisis y Síntesis
CG5 - Aplicación de los conocimientos a la práctica
CG6 - Razonamiento crítico
CG10 - Comunicación y expresión escrita
CG13 - Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

CED1 - Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores
CED2 - Destreza en el razonamiento cuantitativo, basada en los conocimientos adquiridos
CEA4 - Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento, ya sea de forma teórica o práctica, mediante la búsqueda de contraejemplos
CEA7 - Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en forma oral como escrita
CEA8 - Capacidad de relacionar distintas áreas de las Matemáticas
CE1 - Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- Conocer las nociones fundamentales de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue, así como su papel dentro del Análisis Matemático.
- Comprender las principales clases de conjuntos que intervienen en la teoría de la medida y manejar con soltura conceptos como anillo, álgebra, sigma-anillo y sigma-álgebra.
- Conocer las nociones de medida, medida exterior y espacio de medida, así como sus propiedades básicas y los procedimientos elementales de extensión de medidas.
- Manejar la medida de Lebesgue y comprender su construcción y sus propiedades fundamentales.
- Conocer las funciones medibles e integrables y trabajar con seguridad con sus propiedades básicas.
- Comprender y aplicar los teoremas fundamentales de convergencia para la integral de Lebesgue, en particular el lema de Fatou, el teorema de convergencia monótona y el teorema de convergencia dominada.
- Comprender el significado y el alcance de los teoremas de Egoroff y de Lusin, así como su papel en la estructura de las funciones medibles.
- Familiarizarse con los productos de espacios medibles y de espacios de medida, y comprender el contenido y la utilidad de los teoremas de Fubini y de Tonelli.

- Conocer los espacios L^p y algunas de sus propiedades fundamentales, en particular las desigualdades básicas, la completitud, la densidad y los resultados de dualidad más relevantes.
- Introducirse en el estudio de las medidas signadas y complejas, así como en resultados estructurales fundamentales como el teorema de Radon-Nikodym y la descomposición de Lebesgue.
- Desarrollar la capacidad de resolver problemas y redactar demostraciones con claridad, precisión y rigor matemático en el contexto de la teoría de la medida.

CONTENIDOS

UNIDAD DIDÁCTICA I. Construcción de la medida de Lebesgue y propiedades de las funciones medibles

En esta primera unidad didáctica se introducen las nociones básicas de la teoría de la medida y se construye el marco necesario para definir la integral de Lebesgue. El hilo conductor de la unidad es claro: primero se estudian las clases de conjuntos adecuadas para definir medidas; después se introducen las medidas y los procedimientos de extensión; a continuación se construye la medida de Lebesgue en R; y, finalmente, se estudian las funciones medibles y algunos resultados estructurales fundamentales sobre ellas. Esta unidad proporciona la base conceptual sobre la que se apoyará toda la asignatura.

Tema 1. Clases de conjuntos (I).

En este tema se introducen algunas de las familias de conjuntos más simples sobre las que puede comenzar a desarrollarse una teoría de la medida. La idea es disponer de colecciones estables bajo ciertas operaciones básicas, de manera que tenga sentido definir en ellas funciones aditivas con buenas propiedades.

1. **Anillos de conjuntos.** Se estudian familias de subconjuntos cerradas bajo uniones finitas y diferencias. Estas estructuras constituyen un primer marco natural para definir medidas aditivas.
2. **Un anillo de intervalos.** Se analiza un ejemplo concreto especialmente importante: el anillo formado por intervalos de la recta real. Este ejemplo servirá después como punto de partida para la construcción de la medida de Lebesgue.
3. **sigma-álgebras de conjuntos.** Se introduce la noción de sigma-álgebra, esencial en teoría de la medida, ya que permite trabajar con uniones e intersecciones numerables y proporciona el marco adecuado para definir espacios medibles.

Tema 2. Clases de conjuntos (II).

Este tema completa el estudio de las clases de conjuntos introduciendo estructuras cerradas bajo operaciones numerables y analizando sus propiedades básicas. El objetivo es entender con precisión cuáles son las colecciones de conjuntos adecuadas para desarrollar la teoría de la medida con toda generalidad.

1. **Definición y propiedades de las sigma-álgebras.** Se estudian con detalle las propiedades fundamentales de las sigma-álgebras y su papel como objeto básico de la teoría.
2. **Operaciones con sigma-álgebras.** Se consideran intersecciones, sigma-álgebras generadas y otros procedimientos de construcción. Este punto es importante porque muchas de las sigma-álgebras relevantes aparecen precisamente generadas por ciertas familias iniciales de conjuntos.

Tema 3. Medida y medida exterior.

Una vez fijadas las clases de conjuntos adecuadas, en este tema se introduce la noción de medida, que asigna un tamaño compatible con la estructura de la sigma-álgebra. También se presenta la noción de medida exterior, que desempeña un papel fundamental en los procesos de construcción y extensión de medidas.

1. **Espacios medibles, medidas y espacios de medida.** Se definen los conceptos básicos de espacio medible, medida y espacio de medida, y se estudian los primeros ejemplos.
2. **Propiedades básicas de las medidas.** Se analizan propiedades como la monotonía, la subaditividad numerable y el comportamiento respecto de sucesiones crecientes o decrecientes de conjuntos. Estas propiedades son esenciales en toda la teoría posterior.

Tema 4. Extensiones de medidas.

En este tema se aborda uno de los problemas centrales de la teoría: cómo pasar de una medida definida inicialmente sobre una clase relativamente pequeña de conjuntos a una medida definida sobre una sigma-álgebra más amplia. Este procedimiento es indispensable para la construcción de la medida de Lebesgue.

1. **Teorema de extensión de Hahn.** Se estudia un resultado fundamental que permite extender ciertas medidas definidas en clases más elementales a contextos más generales.
2. **Extensiones de medidas sigma-finitas.** Se considera el caso especialmente importante de las medidas sigma-finitas, que es el que aparece en muchas situaciones relevantes del análisis y en particular en la construcción de la medida de Lebesgue.

Tema 5. Medida de Lebesgue-Stieltjes en R.

Este tema constituye uno de los momentos centrales de la primera unidad. A partir de la noción elemental de longitud de intervalos se construyen medidas sobre la recta real y se obtiene, como caso principal, la medida de Lebesgue. Se trata de una primera realización concreta de la teoría abstracta desarrollada en los temas anteriores.

1. **Medida de Lebesgue-Stieltjes en R.** Se introduce esta clase de medidas asociadas a funciones crecientes, que amplían de manera natural la idea de longitud y proporcionan una familia muy importante de ejemplos.

2. **Medida de Lebesgue en R.** Se obtiene como caso particular la medida de Lebesgue en la recta real, que será la referencia fundamental para el resto del curso y el punto de partida de la teoría de integración.

Tema 6. Funciones medibles.

Una vez construida la medida, el siguiente paso natural es estudiar las funciones compatibles con ella. En este tema se introduce la noción de función medible y se analizan sus propiedades estructurales básicas. Además, se estudian dos resultados fundamentales, los teoremas de Egoroff y de Lusin, que muestran que las funciones medibles comparten, en gran medida, comportamientos próximos a los de las funciones continuas.

1. **Propiedades de las funciones medibles.** Se estudia la estabilidad de la clase de funciones medibles bajo operaciones algebraicas y paso al límite, así como distintos criterios prácticos de medibilidad.
2. **Teorema de Egoroff.** Se demuestra que, bajo hipótesis adecuadas, la convergencia puntual de funciones medibles implica convergencia uniforme fuera de un conjunto de medida pequeña. Este resultado permite controlar mejor el paso al límite.
3. **Teorema de Lusin.** Se estudia el hecho de que una función medible puede aproximarse por funciones continuas en conjuntos grandes desde el punto de vista de la medida. Este teorema expresa de manera muy precisa la cercanía entre medibilidad y continuidad.

UNIDAD DIDÁCTICA II. Integral de Lebesgue. Teoremas de convergencia y otros resultados

En esta segunda unidad didáctica se desarrolla la teoría de la integral de Lebesgue propiamente dicha. Una vez introducidas la medida de Lebesgue y las funciones medibles en la unidad anterior, el objetivo ahora es definir la integral, estudiar sus propiedades fundamentales y demostrar los teoremas de convergencia que la convierten en una herramienta especialmente potente. La unidad incluye además el estudio de los productos de espacios de medida, los teoremas de Fubini y Tonelli y una primera introducción a los espacios L^p, que desempeñan un papel central en el análisis moderno.

Tema 7. Integración (I).

En este tema se introduce la integral de Lebesgue en el caso de funciones no negativas. La construcción se realiza de manera progresiva, comenzando con funciones simples y extendiéndose después a funciones medibles generales. Junto a la definición, se estudian ya algunas de sus propiedades básicas y aparecen los primeros teoremas de convergencia, que muestran la gran robustez de esta teoría frente al paso al límite.

1. **Integrales de funciones no negativas.** Se define la integral de una función característica como la medida del conjunto correspondiente, después la de funciones simples no negativas y, finalmente, la integral de funciones medibles no negativas mediante un proceso de aproximación.

2. **Aditividad de la integral con respecto al integrando.** Se estudian las primeras propiedades lineales de la integral, fundamentales para su manejo posterior.
3. **Teoremas de convergencia.** Se introducen y demuestran resultados básicos como el lema de Fatou y el teorema de convergencia monótona, que constituyen una parte esencial de la teoría.

Tema 8. Integración (II).

Una vez construida la integral para funciones no negativas, en este tema se extiende al caso general de funciones integrables. A partir de la descomposición en parte positiva y parte negativa se define la integral de una función real o compleja y se estudian sus propiedades fundamentales. El tema culmina con el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, uno de los resultados más importantes de toda la asignatura.

1. **Funciones integrables e integrales.** Se introduce la noción de función integrable a partir de sus partes positiva y negativa y se define su integral correspondiente.
2. **Propiedades elementales de la integral.** Se estudian propiedades estructurales como linealidad, monotonicidad, estimaciones básicas y compatibilidad con el valor absoluto.
3. **Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.** Se demuestra uno de los resultados centrales de la teoría, que permite intercambiar límite e integral bajo una hipótesis de dominación adecuada.

Tema 9. Productos de espacios de medida (I).

En este tema se introduce la construcción de productos de espacios medibles y de espacios de medida. El objetivo es preparar el terreno para trabajar con funciones de varias variables y para construir la medida de Lebesgue en R^n a partir de la medida en la recta real. Se trata de un paso fundamental para entender la integración en varias variables desde el punto de vista de la teoría de la medida.

1. **Productos de espacios medibles.** Se define la estructura medible producto a partir de los rectángulos medibles y de la sigma-álgebra generada por ellos.
2. **Productos de espacios de medida.** Se construye la medida producto y se estudian sus propiedades básicas.
3. **Medida de Lebesgue en R^n.** Se aplica la construcción anterior al caso euclídeo, obteniendo la medida de Lebesgue en dimensión finita como una medida producto convenientemente completada.

Tema 10. Productos de espacios de medida (II).

Este tema completa el estudio de los productos de medidas con algunos de sus resultados más importantes. En particular, se desarrollan los teoremas de Fubini y Tonelli, que permiten calcular integrales sobre espacios producto mediante integrales iteradas. Se trata de resultados fundamentales tanto desde el punto de vista teórico como en las aplicaciones.

1. **Productos tensoriales de medidas.** Se profundiza en la estructura del producto de medidas y en su interpretación dentro del marco general de la teoría.

2. **Teoremas de Fubini y de Tonelli.** Se estudian los resultados que relacionan la integral sobre un espacio producto con las integrales iteradas sobre cada uno de los espacios de partida. Estos teoremas son esenciales para la integración en varias variables.
3. **Complección del producto de medidas.** Se analiza el paso a la compleción del producto de medidas y su relación con la medida de Lebesgue en espacios euclídeos.

Tema 11. Espacios de Lebesgue.

En este tema se introducen los espacios L^p, una de las familias de espacios funcionales más importantes de todo el análisis. A partir de la integral de Lebesgue se definen sus normas, se estudian desigualdades fundamentales y se analizan propiedades estructurales como la completitud, la densidad y la dualidad. Este tema muestra con claridad cómo la teoría de la medida y la integración desemboca de manera natural en el análisis funcional.

1. **Desigualdades fundamentales.** Se estudian las desigualdades de Hölder y de Minkowski, básicas para el trabajo con normas p y para el desarrollo de la teoría de los espacios L^p.
2. **Teoremas de convergencia.** Se analizan distintos resultados de convergencia en los espacios L^p y se prueba la completitud de estos espacios.
3. **Espacios L^p(mu), 1 menor o igual que p menor que infinito.** Se introducen los espacios L^p asociados a una medida arbitraria y se estudian sus propiedades principales.
4. **El espacio L^{infinito}(mu).** Se considera el caso p = infinito, que presenta características propias y requiere un tratamiento específico.
5. **El espacio conjugado de L^1(mu).** Se estudia la descripción del dual de L1.
6. **Los espacios conjugados de L^p(mu), 1 menor que p menor que infinito.** Se presentan los resultados fundamentales de dualidad para los espacios L^p.
7. **Propiedades de densidad.** Se estudian distintas familias densas en L^p, entre ellas las funciones continuas o las funciones simples, según el contexto.

UNIDAD DIDÁCTICA III. Medidas signadas; descomposiciones de medidas; el teorema de Radon-Nikodym

En esta tercera unidad didáctica se amplía el marco de la teoría de la medida más allá de las medidas positivas. Se introducen las medidas signadas y complejas, se estudian sus descomposiciones fundamentales y se presentan algunos de los resultados más profundos y estructurales del curso, entre ellos el teorema de Radon-Nikodym y la descomposición de Lebesgue. Esta unidad ofrece una visión más amplia y madura de la teoría, y muestra hasta qué punto las ideas introducidas en los temas anteriores pueden desarrollarse en contextos más generales.

Tema 12. Medidas signadas.

En este tema se introducen las medidas signadas como generalización natural de las medidas positivas. Su estudio permite extender diversos conceptos y resultados de la teoría básica y conduce a descomposiciones muy importantes desde el punto de vista estructural.

1. **Propiedades elementales de las medidas signadas.** Se definen las medidas signadas y se estudian sus propiedades más básicas, prestando especial atención a la sigma-aditividad.
2. **Teoremas de Hahn y de Jordan.** Se presentan las descomposiciones fundamentales de una medida signada, que permiten entenderla como diferencia de medidas positivas adecuadas.
3. **Las integrales como medidas signadas.** Se interpreta la integración respecto de una función o de una medida en el marco de las medidas signadas, lo que permite conectar la teoría de la integración con la de las descomposiciones.

Tema 13. Medidas complejas.

Este último tema extiende todavía más el marco de la teoría al considerar medidas con valores complejos. En este contexto aparecen algunos de los resultados más profundos de la asignatura, que describen la relación entre medidas y densidades y permiten descomponer una medida con respecto a otra.

1. **Propiedades elementales de las medidas complejas.** Se introducen las medidas complejas y se analizan sus propiedades básicas, en particular las relacionadas con la sigma-aditividad y la variación total.
2. **Teorema de Radon-Nikodym.** Se estudia uno de los resultados fundamentales de la teoría de la medida, que caracteriza las medidas absolutamente continuas respecto de otra medida en términos de integración frente a una función densidad.
3. **Descomposición de Lebesgue.** Se presenta la descomposición de una medida en una parte absolutamente continua y una parte singular respecto de otra medida, culminando así una de las ideas estructurales más importantes del curso.

METODOLOGÍA

La asignatura se desarrollará siguiendo la metodología propia de la enseñanza a distancia de la UNED, combinando el estudio autónomo del texto base con el uso habitual del curso virtual y de los distintos cauces de comunicación con el equipo docente.

El texto base constituirá la referencia principal para el estudio de la asignatura. En él se fijan tanto los contenidos fundamentales del curso como la notación de referencia que se utilizará también en las pruebas de evaluación. El estudiante deberá trabajar los distintos temas de manera progresiva, prestando atención no solo a las definiciones y resultados, sino también al sentido de las construcciones introducidas y a la lógica de las demostraciones.

Dado el carácter teórico de la asignatura, el aprendizaje no debe reducirse a la lectura pasiva del material. Resulta esencial que el estudiante reconstruya argumentos, analice con cuidado ejemplos y contraejemplos, compare hipótesis y conclusiones y resuelva de forma regular ejercicios representativos de cada tema. En una materia como esta, la comprensión de las definiciones y de los resultados básicos es especialmente importante, ya que muchos de los teoremas del curso se apoyan de manera directa en los conceptos introducidos en los primeros temas.

Se recomienda abordar el estudio de forma continuada desde el comienzo del curso. Los temas iniciales, dedicados a clases de conjuntos, medidas, extensiones de medidas y funciones medibles, contienen el lenguaje y las herramientas sobre las que se construye toda la teoría posterior. Por ello, es importante no avanzar con lagunas en estos bloques, pues ello dificultaría sensiblemente la comprensión de la integral de Lebesgue, de los teoremas de convergencia, de los productos de medidas y de los espacios Lp.

El curso virtual constituirá un recurso fundamental de apoyo al estudio. En él se pondrán a disposición del estudiante avisos, orientaciones, posibles aclaraciones sobre el temario, materiales complementarios y, en su caso, indicaciones sobre el ritmo recomendado de trabajo. Asimismo, los foros servirán como espacio de comunicación académica para plantear dudas, discutir cuestiones concretas de la asignatura y compartir observaciones relevantes sobre el texto base y sobre los contenidos del curso.

Con carácter general, las dudas de contenido matemático deberán formularse de manera clara, concreta y razonada, procurando que reflejen un trabajo previo por parte del estudiante. Las cuestiones administrativas o relativas al funcionamiento general de la asignatura se canalizarán a través de los espacios habilitados para ello en el curso virtual.

La preparación de la asignatura exigirá, por tanto, lectura atenta, trabajo regular con ejercicios, revisión cuidadosa de demostraciones y participación activa en el estudio personal. El objetivo no es únicamente conocer definiciones o resultados aislados, sino comprender la estructura interna de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue, así como su utilidad en problemas y contextos posteriores del análisis.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	3
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	

Ninguno.

Criterios de evaluación

La prueba presencial constituirá el elemento central de la evaluación de la asignatura. En su corrección se valorarán prioritariamente la comprensión de las definiciones y resultados fundamentales, la capacidad de resolver problemas y desarrollar demostraciones con rigor, el uso correcto del lenguaje matemático y la claridad en la identificación de las hipótesis y de las conclusiones.

En todas las respuestas será necesario justificar adecuadamente lo que se afirma. No se valorarán únicamente los resultados finales, sino también el procedimiento seguido, la correcta utilización de los resultados del curso y la solidez del razonamiento desarrollado. Los errores conceptuales, el uso incorrecto de resultados o la omisión de hipótesis esenciales penalizarán de forma significativa.

También se tendrá en cuenta la presentación del examen, la coherencia de la notación empleada y la claridad expositiva. La notación oficial de la asignatura será la del texto base.

% del examen sobre la nota final	80
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	5

Comentarios y observaciones

La prueba presencial consistirá en tres ejercicios, teóricos y/o prácticos, que podrán tener varios apartados. En el examen podrán aparecer tanto cuestiones de carácter más conceptual como problemas y demostraciones.

La evaluación continua tendrá carácter complementario y su finalidad será premiar el trabajo sostenido a lo largo del curso, pero no sustituirá en ningún caso la prueba presencial.

Las calificaciones de evaluación continua solo podrán ser tenidas en cuenta cuando la nota del examen presencial sea igual o superior a 5.

Para la convocatoria extraordinaria de septiembre, la calificación será la obtenida en la prueba presencial de dicha convocatoria.

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?	Si

Descripción

La evaluación continua de la asignatura se realizará mediante dos trabajos escritos, de carácter individual, que deberán entregarse a través del curso virtual.

El primer trabajo versará sobre contenidos de la primera parte del curso, en particular sobre clases de conjuntos, medidas, extensiones de medidas y funciones medibles.

El segundo trabajo versará sobre contenidos de la segunda parte del curso, en particular sobre integración de Lebesgue, teoremas de convergencia, productos de medidas, espacios Lp o cuestiones relacionadas con estos temas.

Cada trabajo se calificará sobre 10 puntos.

Criterios de evaluación

En la corrección de los trabajos se valorarán la comprensión efectiva de los contenidos, la corrección matemática de las respuestas, la adecuada justificación de los argumentos, la claridad expositiva y el uso correcto del lenguaje matemático. **Las PEC deberán reflejar trabajo personal del estudiante. El equipo docente podrá valorar positivamente, dentro del marco de la evaluación continua, las aportaciones especialmente útiles y bien fundamentadas al texto base de la asignatura, tales como la detección de erratas, la propuesta de mejoras expositivas o la identificación de aclaraciones matemáticas pertinentes. Estas aportaciones tendrán en todo caso carácter complementario y no podrán sustituir los elementos ordinarios de evaluación.**

Ponderación de la PEC en la nota final	Cada trabajo suma como máximo el 10% de la nota final.
Fecha aproximada de entrega	Primer trabajo: hacia la mitad del curso. Segundo trabajo: al final del curso.

Comentarios y observaciones

La realización de los trabajos de evaluación continua es voluntaria. En caso de no realizar ninguno de ellos, la nota final será la del examen presencial.

Las calificaciones de las PEC solo podrán mejorar la nota del examen y nunca compensar por sí solas una calificación inferior a 5 en la prueba presencial.

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?	No
Descripción	
Criterios de evaluación	
Ponderación en la nota final	0
Fecha aproximada de entrega	
Comentarios y observaciones	

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Sean:
EX = nota del examen presencial, sobre 10 puntos.
PEC1 = nota del primer trabajo, sobre 10 puntos.
PEC2 = nota del segundo trabajo, sobre 10 puntos.
NF = nota final, sobre 10 puntos.
La calificación final se obtendrá del siguiente modo:
Si EX es menor que 5, entonces NF = EX.
Si EX es mayor o igual que 5, entonces
NF = max(EX, 0,8·EX + 0,1·PEC1 + 0,1·PEC2).
De este modo, la evaluación continua podrá mejorar la calificación de quienes hayan aprobado la prueba presencial, pero no podrá utilizarse para compensar un examen suspenso.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788418316869
Título:INTRODUCCIÓN A LA INTEGRAL DE LEBESGUEnull
Autor/es:Victor Olmos Prieto ; Jorge Lopez Abad ;
Editorial:EDITORIAL SANZ Y TORRES

El texto base de la asignatura desarrolla los contenidos fundamentales del curso y constituye la referencia principal para su estudio. En él se fijan tanto la organización general de la materia como la notación de referencia que se utilizará a lo largo de la asignatura y en las pruebas de evaluación.
Se recomienda trabajar este texto de manera activa, prestando atención no solo a las definiciones y resultados, sino también a las demostraciones, ejemplos y ejercicios propuestos. Dado que la asignatura introduce una teoría nueva y con un grado notable de abstracción, es especialmente importante leer con cuidado los primeros temas y afianzar bien los conceptos básicos antes de avanzar.
El texto base debe considerarse, por tanto, el instrumento principal de trabajo del estudiante, sin perjuicio de las orientaciones, aclaraciones y materiales complementarios que puedan incorporarse al curso virtual.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9780070619876
Título:REAL AND COMPLEX ANALYSIS3ª
Autor/es:W.Rudin ;
Editorial:MHHE

ISBN(13):9780134689494
Título:REAL ANALYSIS4ª
Autor/es:P. M. Fitzpatrick ; H. L. Royden ;
Editorial:PEARSON

ISBN(13):9780691113869
Título:REAL ANALYSIS MEASURE THEORY, INTEGRATION, AND HILBERT SPACES1ª
Autor/es:Rami Shakarchi ; Elias M. Stein ;
Editorial:PRINCETON UNIVERSITY PRESS

ISBN(13):9781468494402
Título:MEASURE THEORYSegunda
Autor/es:Paul R. Halmos ;
Editorial:Biirkhäuser-Springer

ISBN(13):9781468494426
Título:MEASURE THEORYnull
Autor/es:P. Halmos ;
Editorial:SPRINGER-VERLAG

ISBN(13):9788420506319
Título:INTEGRACIÓN : TEORÍA Y TÉCNICASnull
Autor/es:Rubio, Baldomero ; Miguel De Guzman ;
Editorial:Alhambra

ISBN(13):9788436223323
Título:ANÁLISIS MATEMÁTICO V[1ª ed., 1ª reimp.]
Autor/es:Valdivia Ureña, Manuel ;
Editorial:Universidad Nacional de Educación a Distancia

La bibliografía complementaria tiene como finalidad ampliar, reforzar o matizar algunos de los contenidos desarrollados en el texto base. No es necesaria para seguir adecuadamente la asignatura, pero puede resultar útil para estudiantes que deseen contrastar enfoques, consultar otras demostraciones o profundizar en determinados aspectos de la teoría.
Los textos de Royden y Fitzpatrick, Rudin y Halmos son referencias clásicas y muy valiosas para el estudio de la teoría de la medida y de la integración, tanto por la solidez de su exposición como por la variedad de ejemplos y resultados que contienen.

El texto de Valdivia ha sido durante años una referencia importante en esta asignatura y sigue siendo útil como apoyo complementario para determinados temas. Asimismo, otras referencias de la bibliografía pueden ser de interés para quienes deseen ampliar su formación en análisis real y teoría de la medida.
La consulta de esta bibliografía debe entenderse siempre como complemento del texto base y no como sustitución del mismo.

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Curso virtual donde también se encuentran el foro y correos electrónicos de profesor y alumnos, y la atención a los alumnos en las guardias.

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.