26-27

GRADO EN MATEMÁTICAS
TERCER CURSO

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT

CÓDIGO 61023044

UNED

26-27

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT

CÓDIGO 61023044

ÍNDICE

NOMBRE DE LA ASIGNATURA	INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT
CÓDIGO	61023044
CURSO ACADÉMICO	2026/2027
DEPARTAMENTO	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES
TÍTULO EN QUE SE IMPARTE	GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO	TERCER CURSO
PERIODO	SEMESTRE 1
Nº ETCS	6
HORAS	150.0
IDIOMAS EN QUE SE IMPARTE	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

Introducción a los Espacios de Hilbert es una asignatura obligatoria de 6 créditos ECTS, impartida en el primer cuatrimestre del tercer curso del Grado en Matemáticas. Se integra en el área de Análisis Matemático y tiene como objetivo introducir una de las estructuras centrales del análisis moderno: los espacios de Hilbert, es decir, espacios vectoriales con producto interno completos respecto de la norma asociada. Desde el punto de vista conceptual, la asignatura prolonga de forma natural el estudio de los espacios euclídeos de dimensión finita y permite trasladar a contextos infinito-dimensionales nociones geométricas tan importantes como la longitud, el ángulo, la ortogonalidad o la proyección ortogonal.

Uno de los rasgos más relevantes de esta teoría es que combina de manera especialmente eficaz la intuición geométrica con herramientas analíticas potentes. Gracias al producto interno y a la completitud, en los espacios de Hilbert aparecen resultados fundamentales sobre aproximación, descomposición ortogonal, bases ortonormales y representación de funcionales y operadores. Todo ello convierte a estos espacios en un marco natural para estudiar espacios de sucesiones y de funciones, y permite comprender con mayor profundidad fenómenos que en dimensión finita aparecen de forma más elemental. En este sentido, la asignatura no solo introduce una nueva clase de espacios, sino también una manera de pensar que será esencial en cursos posteriores del área.

La importancia de los espacios de Hilbert no es únicamente teórica. Su estructura desempeña un papel fundamental en numerosos campos de la matemática y sus aplicaciones. Aparecen de forma natural, por ejemplo, en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, en la mecánica cuántica, en la teoría de la señal, en el análisis de procesos estocásticos de cuadrado integrable y en distintos problemas de modelización matemática. Por ello, aunque la asignatura tenga un contenido abstracto y formativo, su alcance va mucho más allá del marco puramente teórico: proporciona herramientas básicas para comprender desarrollos posteriores tanto del análisis matemático como de varias de sus aplicaciones.

Dentro del plan de estudios, la asignatura establece un puente entre materias ya cursadas y otras que se abordarán más adelante. Se apoya de manera natural en conocimientos previos de Álgebra Lineal y de Funciones de varias variables, y prepara al estudiante para asignaturas posteriores, en particular para Análisis de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales. Al mismo tiempo, constituye una base conceptual importante para comprender el paso desde los espacios euclídeos a marcos más generales del análisis funcional, donde muchas propiedades familiares dejan de ser automáticas y deben ser estudiadas con nuevas herramientas.

Aunque el programa incluye un abanico amplio de contenidos, el objetivo de la asignatura no es agotar todos los aspectos de la teoría general en que se encuadran los espacios de Hilbert, sino ofrecer una primera introducción sólida a sus conceptos, ejemplos y resultados fundamentales. Parte del material tiene un carácter de repaso o de contextualización, y varias de las nociones estudiadas deben entenderse como una prolongación natural de ideas ya conocidas en ^{n}. El énfasis del curso recaerá, por tanto, en aquellos aspectos que permiten comprender la estructura geométrica y analítica propia de los espacios de Hilbert y su papel dentro del análisis matemático.
Por todo ello, Introducción a los Espacios de Hilbert ocupa un lugar especialmente relevante en la formación matemática del estudiante. La asignatura permite consolidar ideas geométricas y analíticas fundamentales, familiarizarse con ejemplos y resultados de gran alcance, y adquirir una primera visión unificada de cuestiones que reaparecerán posteriormente en distintas ramas del análisis. Su estudio resulta especialmente valioso tanto para quienes deseen profundizar en el Análisis Matemático como para quienes quieran comprender algunos de los marcos abstractos más útiles de la matemática contemporánea.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Para cursar adecuadamente esta asignatura es conveniente haber adquirido una base sólida en Álgebra Lineal y en Análisis Matemático, en particular en las asignaturas de Funciones de una variable y Funciones de varias variables. Resulta especialmente importante manejar con soltura nociones como espacio vectorial, aplicación lineal, diagonalización, producto escalar, bases ortogonales, continuidad, convergencia y compacidad en los contextos ya estudiados en cursos anteriores.
También se recomienda un buen dominio de los números complejos y de las técnicas básicas de cálculo asociadas a ellos. Aunque la asignatura se centra en la teoría de los espacios de Hilbert, muchos de los ejemplos y resultados más importantes se formulan naturalmente en espacios de funciones o de sucesiones con valores reales o complejos, por lo que esta familiaridad resulta muy útil desde el comienzo del curso.
Desde el punto de vista del trabajo personal, se aconseja seguir la asignatura de forma continua y no concentrar el estudio en las semanas previas al examen. La materia exige asimilar definiciones, comprender demostraciones y trabajar regularmente con ejercicios. En

particular, es recomendable intentar resolver por cuenta propia una selección significativa de los problemas propuestos en el texto base antes de consultar soluciones o indicaciones externas.
Aunque no se exige un conocimiento previo profundo de análisis funcional, sí es importante acudir a la asignatura con madurez matemática suficiente para seguir argumentos abstractos y redactar razonamientos con precisión. La asignatura está concebida como una primera introducción sistemática a una de las estructuras fundamentales del análisis moderno, y su aprovechamiento será mayor cuanto más asentados estén los conocimientos básicos mencionados.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	JORGE LOPEZ ABAD (Coordinador/a de asignatura)
Correo Electrónico	abad@mat.uned.es
Teléfono	91398-7234
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Nombre y Apellidos	JOSE IGNACIO TELLO DEL CASTILLO
Correo Electrónico	jtello@mat.uned.es
Teléfono	91398-7350
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

El equipo docente realizará la tutorización fundamentalmente a través del Curso Virtual. El Seguimiento del Aprendizaje se realizará mediante el curso virtual y los foros abiertos para ese fin. En él se habilitarán foros temáticos en los que el alumno podrá plantear sus dudas y trabajar junto con sus compañeros.

Tutorización presencial en la Sede Central en los siguientes horarios:
Martes de 10:00 a 14:00 horas.
Despacho: 2.95
Facultad de Psicología, C/ Juan del Rosal 10
Tutorización telefónica en los horarios de atención presencial en el teléfono 91 398 7350
Tutorización postal. En la dirección:
J.Ignacio Tello
Departamento de Matemáticas Fundamentales. Fcultad de Ciencias
Edificio de Psicología. C/ Juan del Rosal 10
28040-Madrid

TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

En el enlace que aparece a continuación se muestran los centros asociados y extensiones en las que se imparten tutorías de la asignatura. Estas pueden ser:

•**Tutorías de centro o presenciales**: se puede asistir físicamente en un aula o despacho del centro asociado.

•**Tutorías campus/intercampus**: se puede acceder vía internet.

Consultar horarios de tutorización de la asignatura 61023044

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

COMPETENCIAS GENERALES

CG4- Análisis y Síntesis

CG5- Aplicación de los conocimientos a la práctica

CG6- Razonamiento crítico

CG8- Seguimiento, monitorización y evaluación del trabajo propio o de otros

CG10- Comunicación y expresión escrita

CG13- Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

CED1- Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores

CED2- Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos

CEA4- Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos

CEA7- Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita

CEA8- Capacidad de relacionar distintas áreas de las matemáticas

CE1- Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos

CEP4- Resolución de problemas

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

•Comprender el concepto de espacio de Hilbert como generalización de los espacios euclídeos de dimensión finita, identificando el papel del producto interno y de la completitud en su estructura.
•Manejar con soltura los conceptos fundamentales asociados a los espacios de Hilbert, tales como norma inducida, ortogonalidad, subespacios ortogonales y proyección ortogonal.
•Conocer y utilizar los ejemplos más importantes de espacios de Hilbert, en particular los espacios de sucesiones y determinados espacios de funciones de cuadrado integrable.
•Comprender el significado y la utilidad de las bases ortonormales, así como los resultados básicos relacionados con el desarrollo de elementos respecto de tales bases.
•Resolver problemas de aproximación en espacios de Hilbert mediante el uso de la ortogonalidad y de los teoremas de proyección.
•Entender el teorema de representación de Riesz y utilizarlo para describir los funcionales lineales continuos sobre un espacio de Hilbert.
•Introducirse en el estudio de los operadores lineales continuos en espacios de Hilbert, prestando especial atención al operador adjunto y a los operadores autoadjuntos.
•Conocer las nociones básicas relativas a los operadores compactos en espacios de Hilbert y algunos de sus resultados fundamentales.
•Desarrollar la capacidad de redactar demostraciones y resolver ejercicios con precisión, claridad y rigor matemático en el contexto de esta teoría.
•Reconocer el papel de los espacios de Hilbert en otras áreas del análisis matemático y en diversas aplicaciones, como el análisis de Fourier, las ecuaciones en derivadas parciales, la mecánica cuántica o la teoría de la señal.

CONTENIDOS

Tema 1. Introducción

En este primer tema se presentan algunos conceptos y herramientas básicas que servirán de apoyo al resto de la asignatura. Aunque parte del contenido aparece marcado como opcional, ello no debe interpretarse como falta de relevancia matemática, sino como indicación de que se trata de materiales de apoyo, repaso o ampliación que no necesariamente se desarrollarán con el mismo grado de detalle durante el curso. Su función principal es fijar el lenguaje y el marco general en el que más adelante se estudiarán los espacios de Hilbert.

1.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y su papel dentro de la asignatura, destacando qué nociones previas conviene tener presentes antes de abordar el estudio de los espacios de Hilbert.

1.2 Lema de Zorn

Se introduce este resultado de teoría de conjuntos, fundamental en muchas demostraciones de existencia en álgebra y análisis funcional. Aunque su uso en la asignatura es limitado, conviene conocer su enunciado y su alcance.

1.3 Espacios vectoriales (opcional)

Se repasan las nociones básicas sobre espacios vectoriales y subespacios, con el fin de consolidar el marco algebraico en el que posteriormente se introducirán productos internos, normas y operadores. Su carácter opcional debe entenderse en sentido expositivo, no conceptual.

1.4 Bases en espacios vectoriales y dimensión

Se estudian los conceptos de base y dimensión en el contexto algebraico general. Este apartado permite recordar ideas esenciales para entender después la diferencia entre bases algebraicas y bases ortonormales.

1.5 Aplicaciones lineales (opcional)

Se revisan las nociones elementales relativas a las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. Este material sirve como preparación para el estudio posterior de operadores lineales continuos.

1.6 Topología en R^n (opcional)

Se recuerdan algunas propiedades topológicas básicas de los espacios euclídeos, útiles como referencia para comparar después lo que ocurre en espacios de dimensión infinita.

1.7 Desigualdades en R^n

Se estudian desigualdades fundamentales que aparecen de manera natural en el análisis y que resultarán útiles más adelante en el tratamiento de normas, productos internos y estimaciones.

1.8 Ejercicios

Los ejercicios de este tema permiten afianzar los conceptos introductorios y comprobar que se manejan con soltura las herramientas básicas necesarias para seguir adecuadamente la asignatura.

Tema 2. Espacios topológicos

En este tema se introducen algunas nociones topológicas y métricas básicas que resultan necesarias para formular con precisión muchos de los conceptos y resultados que aparecerán más adelante en la asignatura. Aunque el interés principal del curso se centra en los espacios de Hilbert, conviene disponer previamente de un marco general en el que se sitúan ideas como continuidad, compacidad, convergencia o completitud. De manera especial, el teorema de Baire constituye una herramienta fundamental en análisis funcional y permite comprender mejor varios resultados estructurales de gran alcance.

2.1 Introducción

Se presenta el papel de los espacios topológicos y métricos dentro del análisis moderno y su utilidad como marco general para estudiar continuidad, convergencia y compacidad.

2.2 Espacio topológico: Definición

Se introduce la noción de espacio topológico y los conceptos básicos asociados a ella. Este apartado permite situar en un contexto general muchas de las propiedades que más adelante se estudiarán en espacios métricos, normados y de Hilbert.

2.3 Espacio métrico

Se estudian los espacios métricos como una clase especialmente importante de espacios topológicos. La métrica permite trabajar de manera más concreta con distancias, sucesiones convergentes, conjuntos cerrados y completitud.

2.4 Funciones continuas

Se revisa el concepto de continuidad entre espacios topológicos y métricos. Este apartado sirve para reforzar una noción central del análisis y para preparar el estudio posterior de aplicaciones lineales continuas y operadores.

2.5 Conjuntos compactos

Se introduce el concepto de compacidad y algunas de sus propiedades básicas. La compacidad desempeña un papel esencial en numerosos resultados de análisis y, en el contexto de la asignatura, resulta especialmente útil para apreciar diferencias importantes entre dimensión finita e infinita.

2.6 Teorema de Baire

Se estudia uno de los resultados fundamentales de la topología y del análisis funcional. El teorema de Baire está en la base de varios teoremas importantes que aparecen en cursos posteriores y proporciona una primera muestra de la profundidad de los métodos abstractos del análisis.

2.7 Ejercicios

Los ejercicios de este tema tienen como objetivo afianzar el manejo de los conceptos topológicos y métricos básicos, así como familiarizar al estudiante con ejemplos y contraejemplos relevantes.

Tema 3. Integral de Lebesgue

En este tema se introducen los elementos básicos de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue que serán necesarios para estudiar, más adelante, espacios de funciones de gran importancia en análisis, y en particular el espacio L^2, que constituye uno de los ejemplos fundamentales de espacio de Hilbert. Aunque no se pretende desarrollar aquí toda la teoría con exhaustividad, sí se presentan los conceptos y resultados imprescindibles para comprender el marco en el que se definen los espacios L^p y para trabajar con rigor en contextos funcionales más generales que los del cálculo clásico.

3.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y su importancia dentro de la asignatura, destacando el papel de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue en el estudio de espacios de funciones.

3.2 Espacio medible

Se introduce la noción de espacio medible como estructura básica sobre la que se define posteriormente el concepto de medida. Este apartado proporciona el marco abstracto necesario para desarrollar la integración de Lebesgue.

3.3 Medida. Espacio de medida

Se estudia el concepto de medida y el de espacio de medida, que permiten cuantificar el tamaño de conjuntos de una forma mucho más flexible que la longitud, el área o el volumen en sentido clásico.

3.4 Medida de Lebesgue en R^n

Se presenta la medida de Lebesgue en el espacio euclídeo, que constituye el ejemplo más importante de medida para las aplicaciones analíticas. Este apartado sirve como referencia fundamental para los espacios de funciones que aparecerán después.

3.5 Función medible

Se introduce el concepto de función medible, condición básica para poder definir su integral. Se trata de una noción central en la teoría y esencial para el desarrollo de los espacios L^p.

3.6 Teorema de la convergencia monótona y de la convergencia dominada

Se estudian dos de los resultados fundamentales de la integración de Lebesgue. Estos teoremas permiten intercambiar límites e integrales bajo hipótesis adecuadas y constituyen herramientas básicas en análisis.

3.7 Ejercicios

Los ejercicios de este tema tienen como finalidad afianzar los conceptos fundamentales de medida e integración, así como familiarizar al estudiante con los resultados básicos que serán utilizados posteriormente al estudiar espacios de funciones.

Tema 4. Espacios de Banach

En este tema se estudian los espacios normados y, en particular, los espacios de Banach, es decir, aquellos espacios normados que son completos. Aunque el objetivo principal de la asignatura no es desarrollar de manera sistemática la teoría general de los espacios de Banach, este tema resulta importante porque los espacios de Hilbert constituyen una clase especialmente relevante de espacios de Banach. Por ello, conviene conocer previamente algunas nociones, ejemplos y resultados básicos del contexto normado general en el que después se situará la teoría específica de Hilbert.

4.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y su relación con el resto de la asignatura, destacando el paso desde la estructura métrica a la estructura normada y la importancia de la completitud en análisis funcional.

4.2 Espacios normados

Se introduce la noción de espacio normado y las propiedades básicas asociadas a la norma. Este apartado permite formalizar conceptos geométricos y analíticos que generalizan los ya conocidos en espacios euclídeos.

4.3 Espacios de Banach

Se estudia el concepto de completitud en el contexto de los espacios normados y se introduce la noción de espacio de Banach. La completitud constituye una de las propiedades estructurales más importantes en análisis.

4.4 Teorema de la aplicación abierta

Se presenta uno de los teoremas fundamentales del análisis funcional. Este resultado muestra la profundidad de la teoría de los espacios de Banach y pone de manifiesto la fuerza de la completitud en el comportamiento de las aplicaciones lineales continuas.

4.5 Base de Schauder de un espacio de Banach

Se introduce la noción de base de Schauder, que extiende al contexto topológico la idea algebraica de base. Este apartado resulta útil para comparar distintos tipos de representación de los elementos de un espacio y para preparar el estudio posterior de las bases ortonormales en espacios de Hilbert.

4.6 Teorema de Hahn-Banach: forma analítica (opcional)

Se presenta uno de los resultados centrales del análisis funcional. Aunque su tratamiento en esta asignatura tiene carácter complementario, conviene conocer su significado y el papel que desempeña en la teoría general de espacios normados y dualidad.

4.7 Espacios de Banach separables

Se estudia la noción de separabilidad en el contexto de los espacios de Banach. Esta propiedad será especialmente relevante más adelante al considerar bases ortonormales y ejemplos concretos de espacios de Hilbert.

4.8 Funciones continuas entre espacios de Banach

Se revisan las aplicaciones continuas entre espacios de Banach, con especial atención al contexto lineal. Este apartado sirve como preparación para el estudio posterior de operadores en espacios de Hilbert.

4.9 Teorema de Banach-Steinhaus (opcional)

Se introduce otro de los grandes teoremas del análisis funcional. Su presencia en la asignatura tiene un carácter principalmente formativo y de contextualización dentro de la teoría general.

4.10 Espacio dual de un espacio de Banach

Se presenta la noción de espacio dual y el papel de los funcionales lineales continuos. Este concepto será particularmente importante al estudiar más adelante el teorema de representación de Riesz en espacios de Hilbert.

4.11 Ejercicios

Los ejercicios de este tema permiten consolidar el manejo de normas, completitud, dualidad y operadores lineales continuos, así como distinguir con claridad entre propiedades algebraicas, topológicas y geométricas de los espacios estudiados.

Tema 5. El espacio de las funciones continuas

En este tema se estudia el espacio de las funciones continuas como uno de los ejemplos más importantes de espacio de Banach. Su interés dentro de la asignatura es doble: por una parte, proporciona un ejemplo fundamental de espacio funcional en el que confluyen de manera natural ideas topológicas, métricas y normadas; por otra, permite comprender mejor algunas diferencias esenciales entre el contexto general de los espacios de Banach y la situación más específica de los espacios de Hilbert. Además, varios de los resultados de este tema desempeñan un papel central en análisis y en aproximación de funciones.

5.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y la importancia del espacio de las funciones continuas dentro del análisis funcional y de la teoría de aproximación.

5.2 El espacio de las funciones continuas

Se introduce este espacio funcional y se estudian sus propiedades básicas, prestando atención a la estructura lineal y a la norma natural con la que se trabaja en él.

5.3 El espacio de las funciones continuas es un espacio de Banach

Se prueba la completitud de este espacio respecto de la norma del supremo. Este resultado lo convierte en uno de los ejemplos clásicos y más relevantes de espacio de Banach.

5.4 Equicontinuidad

Se estudia el concepto de equicontinuidad, que permite controlar simultáneamente el comportamiento de familias de funciones. Se trata de una noción clave en resultados de compacidad y aproximación.

5.5 Teorema de Ascoli-Arzelà

Se presenta uno de los resultados fundamentales en teoría de funciones y compacidad. Este teorema ofrece un criterio muy útil para caracterizar subconjuntos relativamente compactos de espacios de funciones continuas.

5.6 Teorema de Stone-Weierstrass y separabilidad de C(0,1) (opcional)

Se introduce un importante resultado de aproximación uniforme de funciones continuas por subálgebras suficientemente ricas. Aunque su tratamiento aquí tiene carácter complementario, permite apreciar la profundidad de la teoría y su conexión con la densidad y la separabilidad.

5.7 Ejercicios

Los ejercicios de este tema permiten afianzar el estudio del espacio de las funciones continuas y familiarizarse con ejemplos y resultados fundamentales sobre compacidad, aproximación y estructura funcional.

Tema 6. Espacios de Lebesgue

En este tema se estudian los espacios L^p, que constituyen una de las familias más importantes de espacios de funciones en análisis. Su interés dentro de la asignatura es fundamental, ya que entre ellos aparece el espacio L^2, que es uno de los ejemplos más relevantes de espacio de Hilbert. Por ello, este tema permite enlazar la teoría de la medida y de la integración con la estructura geométrica y analítica que se desarrollará más adelante en el curso. Además, los espacios L^p proporcionan ejemplos esenciales para comprender mejor las diferencias entre el marco general de los espacios de Banach y el caso particular de los espacios de Hilbert.

6.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y la importancia de los espacios L^p en análisis, tanto por su interés propio como por su papel en el estudio posterior de los espacios de Hilbert.

6.2 Definición de espacios L^p

Se introduce la definición de los espacios L^p asociados a un espacio de medida, así como la norma natural con la que se estudian. Este apartado permite construir una amplia clase de espacios funcionales de gran relevancia teórica y aplicada.

6.3 Desigualdad de Hölder en L^p

Se estudia una de las desigualdades fundamentales de la teoría, indispensable para el análisis de los espacios L^p y para numerosas demostraciones posteriores. Esta desigualdad pone de manifiesto la estrecha relación entre distintos exponentes conjugados.

6.4 L^p es un espacio de Banach

Se prueba que los espacios L^p son completos respecto de su norma natural. Este resultado justifica su importancia dentro del análisis funcional y permite situarlos dentro de la teoría general de los espacios de Banach.

6.5 L^p es un espacio separable para p menor que infinito

Se estudia la propiedad de separabilidad en los espacios L^p cuando p es finito. Esta cuestión será especialmente relevante más adelante al considerar ejemplos concretos y desarrollos en espacios de Hilbert.

6.6 Espacio dual de L^p (opcional)

Se introduce la descripción del dual de los espacios L^p en el caso general. Aunque este apartado tiene carácter complementario, resulta muy útil para comprender la estructura de estos espacios y su relación con la dualidad en análisis funcional.

6.7 Convergencia en L^1 y convergencia puntual (opcional)

Se comparan distintos tipos de convergencia en espacios de funciones, mostrando que no siempre coinciden ni tienen las mismas consecuencias. Este apartado permite apreciar mejor la riqueza y sutileza de los espacios funcionales.

6.8 Ejercicios

Los ejercicios de este tema tienen como objetivo consolidar la comprensión de la definición y propiedades básicas de los espacios L^p, así como familiarizar al estudiante con desigualdades, ejemplos y distintos modos de convergencia.

Tema 7. Espacios de Hilbert

En este tema se introduce el núcleo central de la asignatura. Tras los preliminares desarrollados en los temas anteriores, se aborda ya de manera específica la teoría de los espacios de Hilbert, entendidos como espacios con producto interno completos respecto de la norma asociada. La presencia del producto interno dota a estos espacios de una estructura geométrica especialmente rica, que permite definir y estudiar con precisión nociones como ortogonalidad, proyección, base ortonormal o convergencia débil. Por ello, este tema ocupa una posición central dentro de la asignatura y proporciona las herramientas conceptuales fundamentales para los temas posteriores.

7.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y se destaca la importancia de los espacios de Hilbert como marco natural para una gran parte del análisis matemático y de sus aplicaciones.

7.2 Producto interno

Se introduce la noción de producto interno y sus propiedades básicas. A partir de él se obtiene una norma natural y una geometría que generaliza la de los espacios euclídeos.

7.3 Espacios de Hilbert: Definición

Se define formalmente el concepto de espacio de Hilbert y se explica el papel esencial de la completitud en este contexto. Este apartado fija el objeto principal de estudio de la asignatura.

7.4 Ortogonalidad

Se estudia la noción de ortogonalidad y sus consecuencias básicas. La ortogonalidad constituye uno de los rasgos distintivos de los espacios de Hilbert y desempeña un papel central en la resolución de problemas de descomposición y aproximación.

7.5 Conjuntos cerrados en espacios de Hilbert

Se analizan algunas propiedades de los subconjuntos cerrados, especialmente en relación con la ortogonalidad y con los futuros resultados de proyección y mejor aproximación.

7.6 Bases en un espacio de Hilbert

Se introduce la noción de base ortonormal y se estudia su papel en la representación de los elementos del espacio. Este apartado permite comprender una de las diferencias fundamentales entre la estructura de Hilbert y la de un espacio vectorial puramente algebraico.

7.7 Convergencia débil

Se presenta la noción de convergencia débil, que amplía la perspectiva sobre los distintos modos de convergencia en espacios funcionales y resulta especialmente importante en análisis y en aplicaciones.

7.8 Ejercicios

Los ejercicios de este tema tienen como objetivo afianzar los conceptos fundamentales de la teoría de los espacios de Hilbert y desarrollar soltura en el uso de la ortogonalidad, las bases ortonormales y los distintos tipos de convergencia.

Tema 8. Optimización

En este tema se estudian algunas de las consecuencias más importantes de la geometría de los espacios de Hilbert en problemas de aproximación y optimización. La presencia del producto interno y de la ortogonalidad permite formular y resolver con especial claridad problemas de mejor aproximación a conjuntos convexos cerrados, lo que constituye una de las aplicaciones más características de esta teoría. Por ello, este tema desarrolla uno de los aspectos más útiles y representativos de los espacios de Hilbert, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado.

8.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y se explica la relación entre la estructura geométrica de los espacios de Hilbert y los problemas de aproximación óptima.

8.2 Conjuntos convexos. Teorema de la mejor aproximación

Se introduce la noción de conjunto convexo y se estudia el teorema de la mejor aproximación. Este resultado garantiza, bajo hipótesis adecuadas, la existencia y unicidad del punto de un conjunto convexo cerrado que se encuentra más próximo a un elemento dado del espacio.

8.3 Teorema de la proyección

Se estudia uno de los resultados centrales de la teoría de los espacios de Hilbert. El teorema de la proyección permite descomponer un elemento en suma de una componente perteneciente a un subespacio cerrado y otra ortogonal a dicho subespacio, proporcionando una herramienta fundamental para numerosos problemas de análisis y aplicaciones.

8.4 Ejercicios

Los ejercicios de este tema tienen como objetivo afianzar el manejo de los conceptos de convexidad, mejor aproximación y proyección ortogonal, así como desarrollar intuición geométrica en el contexto de los espacios de Hilbert.

Tema 9. Operadores lineales

En este tema se inicia el estudio de los operadores lineales continuos en espacios de Hilbert, que constituyen una parte fundamental del análisis funcional. La estructura geométrica de los espacios de Hilbert permite desarrollar una teoría especialmente rica de estos operadores, en la que aparecen de forma natural nociones como operador adjunto, autoadjunción o representación de funcionales continuos. Este tema sirve, por tanto, para ampliar el estudio de la estructura interna de los espacios de Hilbert y para introducir herramientas esenciales en muchas aplicaciones del análisis.

9.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y la importancia del estudio de los operadores lineales continuos en el contexto de los espacios de Hilbert.

9.2 Operadores lineales y continuos

Se introducen los operadores lineales continuos entre espacios de Hilbert y se revisan sus propiedades básicas. Este apartado permite formalizar el concepto de transformación lineal compatible con la estructura topológica y geométrica del espacio.

9.3 Teorema de la gráfica cerrada (opcional)

Se presenta uno de los resultados fundamentales del análisis funcional relativo a operadores lineales. Aunque su tratamiento en este curso tiene carácter complementario, conviene conocer su significado y su papel dentro de la teoría general.

9.4 Teorema de representación de Riesz

Se estudia uno de los teoremas centrales de la teoría de los espacios de Hilbert. Este resultado caracteriza los funcionales lineales continuos en términos del producto interno y muestra de forma especialmente clara la riqueza estructural de estos espacios.

9.5 Operador adjunto. Operadores autoadjuntos

Se introduce la noción de operador adjunto y se estudian algunas propiedades básicas de los operadores autoadjuntos. Estos conceptos desempeñan un papel fundamental tanto en la teoría abstracta como en muchas aplicaciones.

9.6 Autovalores y autofunciones

Se presentan las nociones de autovalor y autofunción en el contexto de los operadores lineales. Este apartado constituye una primera aproximación a ideas espectrales de gran importancia en análisis y en física matemática.

9.7 Ejercicios

Los ejercicios de este tema tienen como objetivo afianzar el manejo de operadores lineales continuos, del teorema de representación de Riesz y de las nociones básicas asociadas al operador adjunto y a los autovalores.

Tema 10. Operadores compactos

En este tema se estudia una clase especialmente importante de operadores lineales continuos: los operadores compactos. En el contexto de los espacios de Hilbert, estos operadores presentan propiedades estructurales muy ricas y desempeñan un papel central en numerosos resultados del análisis funcional. Su estudio permite introducir de manera natural algunos aspectos básicos de la teoría espectral y comprender mejor la relación entre operadores, autovalores y bases de autofunciones. Por ello, este tema constituye una culminación natural del curso y muestra una de las direcciones más fecundas de la teoría de los espacios de Hilbert.

10.1 Introducción

Se presenta el sentido general del tema y la importancia de los operadores compactos dentro del análisis funcional y, en particular, en la teoría de los espacios de Hilbert.

10.2 Operadores compactos

Se introduce la noción de operador compacto y se estudian sus propiedades básicas. Estos operadores pueden considerarse, en cierto sentido, como una generalización infinito-dimensional de ciertas transformaciones bien conocidas en dimensión finita.

10.3 Autovalores de operadores compactos (opcional)

Se estudian algunos resultados básicos relativos a los autovalores de operadores compactos. Aunque este apartado tiene carácter complementario, permite apreciar la especial regularidad espectral de esta clase de operadores.

10.4 Bases de autofunciones de operadores compactos

Se presenta uno de los aspectos más relevantes de la teoría: la posibilidad, bajo hipótesis adecuadas, de describir la acción del operador a través de autofunciones que proporcionan una representación especialmente útil de los elementos del espacio. Este apartado conecta de forma natural con la estructura ortonormal propia de los espacios de Hilbert.

10.5 Ejercicios

Los ejercicios de este tema tienen como finalidad afianzar la comprensión de la noción de operador compacto y familiarizar al estudiante con sus propiedades básicas y con sus primeras consecuencias espectrales.

Nota aclaratoria: en esta guía, la indicación “opcional” no significa que ese contenido carezca de interés o que sea ajeno a la lógica de la asignatura. En general, señala materiales de apoyo, ampliación o repaso cuya profundidad de tratamiento puede ser variable a lo largo del curso. En una asignatura introductoria no siempre es posible desarrollar con el mismo detalle todos los aspectos del marco teórico en el que se sitúan los espacios de Hilbert; por ello, algunos apartados se consideran complementarios desde el punto de vista expositivo, aunque puedan resultar útiles o muy recomendables para una comprensión más amplia y sólida de la materia.

METODOLOGÍA

La asignatura se desarrollará siguiendo la metodología propia de la enseñanza a distancia de la UNED, combinando el estudio autónomo del texto base con la utilización habitual del curso virtual y de los distintos cauces de comunicación con el equipo docente.

El texto base fijará tanto los contenidos fundamentales de la asignatura como la notación de referencia, que será la utilizada también en las pruebas de evaluación. A lo largo del curso, el estudiante deberá trabajar de manera progresiva los distintos temas, prestando atención no solo a las definiciones y resultados, sino también a la comprensión de las demostraciones y a la relación entre los distintos conceptos introducidos.

Dado el carácter teórico de la asignatura, el aprendizaje no debe reducirse a la lectura pasiva del material. Resulta esencial que el estudiante reconstruya argumentos, compruebe ejemplos, compare hipótesis y conclusiones, y resuelva de manera regular ejercicios representativos de cada tema. En particular, se recomienda intentar resolver por cuenta propia una parte significativa de los problemas propuestos antes de consultar soluciones, indicaciones externas o discusiones en los foros.

El curso virtual constituirá una herramienta fundamental de apoyo al estudio. En él se pondrán a disposición del estudiante orientaciones, avisos, materiales complementarios y, en su caso, indicaciones sobre el ritmo recomendado de trabajo. Asimismo, los foros servirán como espacio de comunicación académica para plantear dudas, aclarar conceptos y discutir cuestiones concretas de la asignatura.

Con carácter general, las cuestiones de contenido matemático deberán plantearse en los foros temáticos correspondientes, procurando formularlas de manera clara, razonada y concreta. Las cuestiones de carácter administrativo o relativas al funcionamiento general de la asignatura se canalizarán a través de los espacios habilitados para ello en el curso virtual.

La preparación de la asignatura exigirá, por tanto, continuidad en el estudio, familiaridad con la redacción matemática y trabajo regular con ejercicios. El objetivo no es únicamente conocer definiciones o resultados aislados, sino adquirir una comprensión suficiente de la estructura de los espacios de Hilbert y de los métodos básicos asociados a esta teoría.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	3
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	

Ninguno

Criterios de evaluación

La prueba presencial constituirá el elemento central de la evaluación de la asignatura. En su corrección se valorarán prioritariamente la comprensión de los conceptos y resultados básicos, la capacidad de resolver problemas mediante argumentos matemáticos rigurosos y ordenados, el uso correcto de la notación y del lenguaje matemático, y la claridad en la identificación de las hipótesis y de las conclusiones.
Todas las respuestas deberán estar suficientemente justificadas. No se valorarán únicamente los resultados finales, sino también el procedimiento seguido, la adecuación de las herramientas utilizadas y la solidez del razonamiento desarrollado. Una respuesta con resultado correcto pero sin justificación suficiente podrá ser calificada solo parcialmente. Asimismo, los errores conceptuales, el uso incorrecto de resultados o la omisión de hipótesis esenciales penalizarán de forma significativa.
También se tendrá en cuenta la presentación del examen, la coherencia de la notación empleada y la claridad expositiva. La notación oficial de la asignatura será la del texto base.

% del examen sobre la nota final	90
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	5

Comentarios y observaciones

La prueba presencial consistirá en tres ejercicios, teóricos y/o prácticos, que podrán tener varios apartados. Su nivel de dificultad no superará el de los problemas representativos trabajados a lo largo del curso.
La prueba de evaluación continua tendrá carácter opcional y su finalidad será complementar el proceso de aprendizaje del estudiante, pero no sustituirá en ningún caso la prueba presencial.
La PEC solo podrá ser tenida en cuenta cuando la calificación de la prueba presencial sea igual o superior a 5. En caso contrario, la nota final coincidirá con la obtenida en dicha prueba.
Para la convocatoria extraordinaria de septiembre, la calificación será la obtenida en la prueba presencial de dicha convocatoria.

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?	Si

Descripción

La prueba de evaluación continua será opcional. Consistirá en una prueba escrita individual, no presencial, con cuestiones teóricas y/o problemas breves de desarrollo, que deberá entregarse a través del curso virtual de la asignatura dentro del plazo que se establezca oportunamente.
Su finalidad será promover el estudio continuado de la materia, la comprensión de los conceptos fundamentales y la capacidad de redactar argumentos matemáticos con claridad y rigor.

Criterios de evaluación

En la corrección de la PEC se valorarán la corrección matemática de las respuestas, la adecuada justificación de los argumentos, la claridad expositiva y el uso correcto del lenguaje matemático. No se valorarán únicamente los resultados finales.

La PEC deberá reflejar trabajo personal del estudiante y ajustarse a las normas de honestidad académica de la UNED.

Ponderación de la PEC en la nota final	máximo del 10%
Fecha aproximada de entrega	PEC/ 15/12/2026
Comentarios y observaciones	

En caso de que el estudiante decida no realizar la PEC, la nota final será la obtenida en la prueba presencial.

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?	No
Descripción	
Criterios de evaluación	
Ponderación en la nota final	
Fecha aproximada de entrega	
Comentarios y observaciones	

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

La calificación final se obtendrá del siguiente modo:

Si la nota del examen presencial es inferior a 5, la calificación final será la nota del examen presencial.

Si la nota del examen presencial es igual o superior a 5 y el estudiante no ha realizado la PEC, la calificación final será la nota del examen presencial.

Si la nota del examen presencial es igual o superior a 5 y el estudiante ha realizado la PEC, la calificación final será:

NotaFinal = 0,9·NotaExamen + 0,1·NotaPEC

En ningún caso la PEC podrá utilizarse para compensar un examen suspenso.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788419947406
Título:INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS FUNCIONALPrimera edición
Autor/es:José Ignacio Tello Del Castillo ;
Editorial:EDITORIAL SANZ Y TORRES

Los contenidos del texto coinciden con los contenidos de la asignatura. Aquellos temas que aparecen en la guía docente como "opcionales" también aparecen en el libro.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9780521337175
Título:AN INTRODUCTION TO HILBERT SPACECambridge, 1988
Autor/es:N. Young ;
Editorial:CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS..

ISBN(13):9780821819128
Título:AN INTRODUCTION TO HILBERT SPACE2ª edición (1999)
Autor/es:S. K. Berberian ;
Editorial:AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

ISBN(13):9788415550624
Título:ESPACIOS DE HILBERT Y ANÁLISIS DE FOURIER: LOS PRIMEROS PASOSSegunda edición 2014
Autor/es:García García, Antonio ; Muñoz Bouzo, Mª José ;
Editorial:SANZ Y TORRES, S.L.

Introduction to Hilbert Space de S.K. Berberian
Existen diversas impresiones en distintas editoriales de la segunda edición, p.e., en Oxford University Press (1961) o incluso una edición en castellano en la editorial Teide (1970) que aunque está descatalogada, sí existe en muchas bibliotecas. Libro de introducción a los espacios de Hilbert con númerosos ejercicios. No estudia sin embargo ni las series de Fourier clásicas, ni la transformada de Fourier ni operadores de convolución ni los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

An Introduction to Hilbert Space de N. Young
Es un texto de introducción a los espacios de Hilbert que se complementa con aplicaciones de la teoría a las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales y a la aproximación de funciones de variable compleja. Contiene númerosos ejemplos y ejercicios. No cubre la transformada de Fourier ni operadores de convolución ni los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

Fourier Analysis and Applications de C. Gasquet y P. Witomski
Es un magnífico texto de ampliación donde las nociones fundamentales del Análisis de Fourier se aplican en análisis de señales (análisis de tiempo-frecuencia, tiempo-escala y el procesado de señales). El libro original es en francés (ed. Dunod) aunque existe una traducción al inglés (1999, ed. Springer Verlag).

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

El principal recurso de apoyo de la asignatura será el curso virtual, a través del cual el estudiante podrá seguir avisos, orientaciones y materiales complementarios, así como plantear dudas y participar en los foros de la asignatura.
Los foros del curso virtual constituirán un espacio de trabajo académico y de intercambio entre estudiantes y equipo docente. En ellos se podrán plantear cuestiones relativas a los contenidos del curso, siempre procurando formularlas de manera clara, concreta y razonada.
Asimismo, el curso virtual servirá para comunicar indicaciones sobre el ritmo de estudio, la prueba de evaluación continua y cualquier otra información relevante para el seguimiento de la asignatura.
Además del curso virtual, el estudiante podrá recurrir a la bibliografía complementaria y a las restantes vías de contacto con el equipo docente indicadas en la guía. Todos estos recursos deben entenderse como apoyo al estudio personal, que seguirá siendo el elemento central del aprendizaje en la asignatura.

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.