

26-27

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA



TOPOLOGÍA ALGEBRAICA (MATEMÁTICAS AVANZADAS)

CÓDIGO 2152013-

UNED

26-27

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA (MATEMÁTICAS
AVANZADAS)

CÓDIGO 2152013-

ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN
REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR ESTA
ASIGNATURA
EQUIPO DOCENTE
HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE
COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE
RESULTADOS DE APRENDIZAJE
CONTENIDOS
METODOLOGÍA
SISTEMA DE EVALUACIÓN
BIBLIOGRAFÍA BÁSICA
BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA
RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA
IGUALDAD DE GÉNERO

Nombre de la asignatura	TOPOLOGÍA ALGEBRAICA (MATEMÁTICAS AVANZADAS)
Código	2152013-
Curso académico	2026/2027
Título en que se imparte	MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS
Tipo	CONTENIDOS
Nº ETCS	7.5
Horas	187.5
Periodo	SEMESTRE 1
Idiomas en que se imparte	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

La asignatura que nos ocupa se dedicará fundamentalmente al estudio de la Topología Algebraica. Ésta es una de las principales ramas de la Topología que hace uso del formalismo algebraico para trabajar en problemas relacionados con espacios topológicos y aplicaciones continuas.

Uno de los problemas fundamentales de la Topología es el estudio y la clasificación de los espacios topológicos y de las aplicaciones continuas entre ellos. Existen diferentes métodos para llevar a cabo esta clasificación. Entre ellos destaca el método del establecimiento de invariantes topológicos que permitan distinguir entre espacios de diferentes clases topológicas. Estos invariantes pueden ser de naturalezas diferentes.

En este curso de Topología, se estudian algunos invariantes topológicos de naturaleza algebraica, tales como el grupo fundamental de homotopía y los grupos de homología. Esto exige un cierto conocimiento de la Teoría de Grupos, y, especialmente, de la Teoría de Grupos Abelianos o Conmutativos y algunas nociones básicas de la Teoría de Módulos.

Se asocian estructuras algebraicas a los espacios y aplicaciones continuas que cumplen las propiedades funtoriales. Estas propiedades garantizan que cada estructura algebraica asociada sea una construcción invariante por homeomorfismos. Si pensamos, por ejemplo, en el grupo fundamental, esto significa que si dos espacios topológicos son homeomorfos entonces sus grupos de homotopía asociados son grupos isomorfos.

En el caso de los grupos de homología, podemos hacer algunas consideraciones semejantes, por lo que estos grupos de homología nos permitirán distinguir en algunos casos entre espacios pertenecientes a diferentes clases topológicas.

Dos nociones fundamentales en Topología Algebraica son las nociones de homotopía de aplicaciones continuas y de tipo de homotopía de espacios topológicos, nociones que están fuertemente relacionadas entre sí, y que se basan en la idea de deformación con continuidad. Las construcciones de las estructuras algebraicas asociadas a los espacios, que se definen en Topología Algebraica, tienen la propiedad de ser invariantes, no solamente del tipo topológico, sino también del tipo de homotopía de los espacios topológicos. Se estudia, en consecuencia, la invariancia homotópica del grupo fundamental y también la invariancia homotópica de los grupos de homología y cohomología.

Esta asignatura tiene además una vertiente práctica por medio de la construcción de algunos tipos de espacios que aparecen frecuentemente en matemáticas y que aportan excelentes ejemplos de aplicación de la teoría aquí desarrollada, además de proporcionar al alumno la oportunidad de desarrollar su capacidad de razonamiento espacial.

La Topología es una rama de las Matemáticas que se ha desarrollado enormemente en los últimos años y juega un papel importante en otras ramas de esta ciencia. La Topología se ocupa del estudio de los espacios topológicos y de las aplicaciones continuas entre ellos.

En el planteamiento didáctico de esta asignatura, gracias al texto empleado, se hace hincapié en un enfoque práctico, fijándonos en algunas construcciones de espacios topológicos, lo cuál servirá de estímulo para la iniciativa del estudiante y al mismo tiempo ayudará a entender mejor la línea que sigue la teoría. Esto además pretende ilustrar el lenguaje empleado hasta ahora en esta rama de la Topología Algebraica con numerosos ejemplos.

Después de unos preliminares sobre los conceptos como homotopía y tipo de homotopía, la teoría algebraica comienza por el estudio del grupo fundamental. En este contexto se trata el teorema de Van Kampen para el cálculo del grupo fundamental de ciertos espacios a partir de otros espacios más conocidos.

Un concepto fundamental y muy relacionado con el grupo fundamental es el de espacio recubridor. El espacio recubridor es un recurso puramente topológico y muy importante en el estudio de la topología y su relación con la geometría, y es una herramienta muy utilizada en estudios más avanzados en topología.

Se construye el espacio recubridor de la circunferencia con todo detalle y se ilustra este concepto con ejemplos de espacios recubridores de grafos. La clasificación de los espacios recubridores de un espacio dado se hace de acuerdo a las clases de cojugación de subgrupos del grupo fundamental del espacio base.

El segundo gran tema de este curso es la Teoría de Homología. Se estudian los grupos de homología simplicial, que ya han formado parte del temario de la asignatura Introducción a la Topología Algebraica y que servirán de introducción a la Homología Singular. La homología singular es el tema que abarca la mayor parte del curso, en este tema se estudia la relación entre homotopía y homología, la sucesión exacta de homología, y la sucesión de Mayer-Vietoris. Esto constituye el núcleo clásico de cualquier teoría de homología, podría considerarse la contrapartida en la teoría de homología del Teorema de Van Kampen.

Se tratará el problema del cálculo de coeficientes arbitrarios a partir del estudio realizado con coeficientes enteros. Se estudia la relación del primer grupo de homología de un complejo con el grupo fundamental. En la parte final del curso se estudia el Teorema del Punto Fijo de Lefschetz, que es una generalización del Teorema del Punto Fijo de Brower. Este teorema guarda relación con la fórmula de la Característica de Euler. Este invariante se ha estudiado cuando se definió el complejo de celdas y posteriormente en función de los grupos de homología.

La Topología Algebraica es un instrumento muy potente para la investigación de los espacios topológicos, especialmente las variedades, los CW-complejos, los complejos celulares, los complejos simpliciales, etc, además de ser un lenguaje de necesario manejo para la lectura de material de investigación en el campo de la Geometría y la Topología.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR ESTA ASIGNATURA

Se recomienda haber cursado alguna asignatura de topología general, en particular, la teoría de grupos abelianos de esta asignatura de Máster se supone conocida.

Otros prerequisites recomendables son: tener conocimientos básicos de Teoría de Grupos, incluyendo el tema de homomorfismos de grupos, y el estudio de los subgrupos y los grupos cocientes de un grupo.

También es recomendable poseer conocimientos básicos de Álgebra Lineal, especialmente en lo concerniente a espacios vectoriales, aplicaciones lineales y matrices, conocimientos básicos de Geometría Elemental, desde el punto de vista sintético y también desde el punto de vista analítico. En particular, es muy útil que el alumno sea capaz de representar en la recta real, en el plano y en el espacio euclídeo tridimensional, figuras geométricas y subconjuntos o partes definidos por un conjunto finito de ecuaciones o inecuaciones.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos
Correo Electrónico
Teléfono
Facultad
Departamento

JOSE LUIS ESTEVEZ BALEA (Coordinador/a de asignatura)
jestevez@mat.uned.es
91398-7239
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

José Luis Estévez

Teléfono del profesor: 91 398 7239. Martes de 10:00 a 14:00.

Correo electrónico del profesor: jestevez@mat.uned.es.

Atención presencial en la Sede Central.

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

Ver sección de Resultados de Aprendizaje.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Conocimientos

CB6 - Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación

CB8 - Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios

CB9 - Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones

últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades

CG2 - Conocer algunas de las líneas de investigación dentro de las áreas cubiertas por el Máster.

CE2 - Conocer los problemas centrales, la relación entre ellos, las técnicas más adecuadas en los distintos campos de estudio, y las demostraciones rigurosas de los resultados relevantes.

CE1 - Saber abstraer las propiedades estructurales de los objetos matemáticos, distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales. Ser capaz de utilizar un objeto matemático en diferentes contextos.

Destrezas y habilidades.

CB7 - Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio

CB10 - Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

CG4 - Aprender a redactar resultados matemáticos.

CE3 - Adquirir la capacidad de enfrentarse con la literatura científica a distintos niveles, desde libros de texto con contenidos avanzados hasta artículos de investigación matemática publicados en revistas especializadas.

CE4 - Saber analizar y construir demostraciones matemáticas, así como transmitir conocimientos matemáticos avanzados en entornos especializados.

Competencias:

CG1 Adquirir conocimientos generales avanzados en alguna de las áreas de las matemáticas

CG3 - Adquirir la metodología de la investigación en matemáticas.

CONTENIDOS

Tema 0. Nociones Básicas

1. Homotopía y Tipo de Homotopía.
2. Complejos de celdas.
3. Operaciones en espacios.

Tema 1. El Grupo Fundamental

1. Homotopía de caminos.
2. El grupo fundamental de la circunferencia.
3. Homomorfismos inducidos a nivel de grupo fundamental.

Tema 2. El Teorema de Van Kampen

1. El Teorema de Van Kampen.
2. Aplicaciones del Teorema de Van Kampen.
3. Van Kampen en CW complejos. El grupo fundamental de una superficie.

Tema 4. Homología simplicial y singular

1. Símplices. Cadenas de símplices.
2. Grupos de Homología Simplicial.
3. Símplice singular. Cadenas de símplices.
4. Grupos de Homología Singular.
5. Homología reducida.
6. Invariancia por homotopía.
7. Homología relativa.
8. Teorema de escisión y sus consecuencias.
9. Equivalencia entre la Homología Simplicial y Singular.

Tema 5. Cálculo de grupos de homología. Sucesión de Mayer-Vietoris.

1. Grado de una aplicación.
2. Homología celular.
3. Homología de superficies. Espacios proyectivos. Espacios lente.
4. Característica de Euler.
5. La sucesión de Mayer-Vietoris.

Tema 6. Homología y grupo fundamental.

1. Homología y grupo fundamental.
2. El Teorema del Punto Fijo de Lefschetz.

METODOLOGÍA

- Enseñanza a distancia con la metodología de la UNED.
- Cursos virtuales (enseñanza virtualizada).
- Aprendizaje basado en problemas resueltos.

- Resolución, por parte del alumno, de problemas y ejercicios.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	4
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	

Ninguno.

Criterios de evaluación

Claridad y estructuración en los razonamientos.

Presentación.

Familiaridad con los conceptos y lenguaje del curso.

% del examen sobre la nota final

Nota del examen para aprobar sin PEC 5

Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC 10

Nota mínima en el examen para sumar la PEC 5

Comentarios y observaciones

El peso de la calificación de la prueba presencial depende de si el estudiante ha realizado otras actividades evaluables. El cálculo de la nota final se explica en el apartado correspondiente.

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA PRESENCIAL Y/O LOS TRABAJOS

Requiere Presencialidad Si

Descripción

La prueba presencial consta de 4 preguntas, que suelen tener varios apartados. Esta prueba se realizará en los centros asociados.

Criterios de evaluación

Se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

Estrategia para la resolución. Estos problemas o admiten más de una forma de resolución o bien implican una cierta dosis de creatividad.

Claridad y estructuración en los razonamientos.

Presentación.

Ponderación de la prueba presencial y/o los trabajos en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?

Si, PEC no presencial

Descripción

Consta de 5 preguntas tipo test de respuesta inmediata que se realizará en línea.

Criterios de evaluación

Ponderación de la PEC en la nota final 15%

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

Se indicará la fecha de la PEC en el curso virtual.

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?

No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Nota final:

La PEC no es obligatoria, el estudiante sólo está obligado a realizar la prueba presencial.

Si se entrega la PEC entonces: $\text{Nota Final} = \text{Nota Prueba Presencial} \cdot 0.85 + (\text{Nota PEC}) \cdot 0.15$

Si solamente se hace la Prueba Presencial: $\text{Nota Final} = \text{Nota Prueba Presencial}$.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9780521795401

Título: ALGEBRAIC TOPOLOGY 2001 edición

Autor/es: Allen Hatcher

Editorial: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Allen Hatcher tiene el libro "*Algebraic Topology*" así como otros libros suyos a libre disposición en su página web:

<https://www.math.cornell.edu/~hatcher/>

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Algunos libros de Teoría de Grupos:

- Baumslag, B.; Chandler, B. *Group Theory*. (Including 600 Solved Problems) Schaum's Outline Series. Mc Graw-Hill. USA. 1968.
- Bujalance, E.; Etayo, J. J.; Gamboa, J.M. *Teoría Elemental de Grupos*. Cuadernos de la UNED. UNED. Madrid. 1987.
- Ledermann, W. *Introduction to Group Theory*. Longman Scientific & Technical. Harlow. 1989.
- Algunos libros de Álgebra (Anillos, cuerpos, espacios vectoriales, etc.):
- Gamboa, J. M.; Ruiz, J. M. *Anillos y Cuerpos Conmutativos*. Cuadernos de la UNED. UNED. Madrid. Tercera edición. Primera reimpresión. 2003.
- Lang, S. *Álgebra*. Aguilar ediciones. Madrid. Primera edición. Primera reimpresión. 1973.

Algunos libros de Topología Algebraica:

Libros de carácter introductorio:

- Alexandroff, P. *Elementary concepts of Topology*. Dover Publications. New York. 1961.
- Armstrong, M. A. *Topología Básica*. Editorial Reverté. Barcelona. 1987.
- Chinn, W. G.; Steenrod, N. E. *Primeros conceptos de Topología*. Editorial Alambra. Madrid. 1975.
- Gemignani, M. G. *Elementary Topology. Second Edition*. Dover Publications. New York. 1990.
- Keesee, J. W. *Introducción a la Topología Algebraica*. Editorial Alhambra. Madrid. 1971.
- Kosniowski, C. *Topología Algebraica*. Editorial Reverté. Barcelona. 1992.
- Massey, W. S. *Introducción a la Topología Algebraica*. Editorial Reverté. Barcelona. 1972.
- Mc Cart, G. *Topology. An Introduction with Applications to Topological Groups*. Dover Publications. New York. 1988.
- Mendelson, B. *Introduction to Topology*. Third Edition. Dover Publications. New York. 1990.
- Munkres, J. R. *Topología. 2ª Edición*. Prentice Hall. Pearson Educación. Madrid. 2002.
- Newman, M. H. A. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. Dover Publications. New York. 1992.
- Singer I. M.; Thorpe, J. A. *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg-New York. 1967.
- Wall, C. T. C. *A Geometric Introduction to Topology*. Dover Publications. New York. 1993.

Libros con nivel de desarrollo más profundo:

- Ayala, R.; Domínguez, E.; Quintero, A. *Elementos de la Teoría de Homología Clásica*. Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones. Sevilla. 2002.
- Dold, A. *Lectures on Algebraic Topology*. Second Edition. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg. 1980.
- Dugundji, J. *Topology*. Allyn and Bacon. Boston. 1966.

- Fulton, W. *Algebraic Topology. A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1995.
- Hatcher, Allen. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press. 2002.
- Hocking, J. G.; Young, G. S. *Topología*. Editorial Reverté. Barcelona. 1975.
- Massey, W. S. *Singular Homology Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1980.
- Massey, W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag. New York. 1991.
- Maunder, C. R. F. *Introduction to Algebraic Topology*. Cambridge University Press. Cambridge. 1980.
- Munkres, J. R. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley. Menlo Park, California. 1984.
- Novikov, S. P.; Rokhlin, V. A. (Editors) *Topology II*. Homotopy and Homology. Classical Manifolds. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Vol. 24. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg. 2004.
- Rohlin, V.; Fuchs, D. *Premier Cours de Topologie*. Chapitres Géométriques. Editorial Mir. Moscú. 1981.
- Rotman, J. J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag. New York. 1988.
- Spanier, E. H. *Algebraic Topology*. Mc Graw-Hill. New York. 1966.
- Switzer, R. M. *Algebraic Topology-Homotopy and Homology*. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg-New York. 1975.
- Van Mill, J. *Infinite-Dimensional Topology*. Prerequisites and Introduction. North-Holland. Elsevier Science Publishers. Amsterdam. 1989.
- Vick, J. W. *Homology Theory*. An Introduction to Algebraic Topology. Springer-Verlag. New York. 1994.
- Whitehead, G. W. *Elements of Homotopy Theory*. Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg-New York. 1978.
- Zisman, M. *Topología Algebraica Elemental*. Editorial Paraninfo. Madrid. 1979.

Lecturas de motivación, ricas en ideas intuitivas:

- Barr, S. *Experiments in Topology*. Dover Publications. New York. 1989.
- Huggett, S. A.; Jordan, D. *A Topological Aperitif*. Springer-Verlag. London. 2001.
- Rolfsen, Dale. *Knots and links*. Publish or Perish, Inc. 1990.
- Weeks, J. R. *The Shape of Space*. Second Edition. Marcel Dekker. New York. 2002.

El gran libro sobre la geometría y la topología de las variedades de dimensión tres:

Thurston, William P. *The Geometry and Topology of three manifolds*.

<https://www.msri.org/gt3m/>

Esta es una obra que ha marcado un hito en el estudio de la topología de las variedades

tridimensionales a través de la geometría. Ha sido y sigue siendo fuente de investigación en este campo. Su lectura no es fácil por el estilo informal y es necesario apoyarse en estudios de otros autores sobre la misma obra.

Existe una versión de imprenta de los primeros capítulos con un desarrollo más formal pero siguiendo el estilo directo del autor:

Thurston, William P. *The Geometry and Topology of three manifolds*. Vol 1. Princeton University Press.

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Curso Virtual.

- Plataforma Ágora.

Otros Recursos de Apoyo.

- En el curso virtual se proporcionan accesos a páginas web con contenidos y software relacionados con la asignatura.

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.