

25-26

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA



COMBINATORIA DE LAS COLORACIONES

CÓDIGO 21520011

UNED

25-26

COMBINATORIA DE LAS COLORACIONES

CÓDIGO 21520011

ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN
REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR ESTA ASIGNATURA
EQUIPO DOCENTE
HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE
COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE
RESULTADOS DE APRENDIZAJE
CONTENIDOS
METODOLOGÍA
SISTEMA DE EVALUACIÓN
BIBLIOGRAFÍA BÁSICA
BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA
RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA
IGUALDAD DE GÉNERO

Nombre de la asignatura	COMBINATORIA DE LAS COLORACIONES
Código	21520011
Curso académico	2025/2026
Título en que se imparte	MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS MICROMÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS
Tipo	CONTENIDOS
Nº ETCS	7.5
Horas	187.5
Periodo	SEMESTRE 1
Idiomas en que se imparte	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

Introducción general

Este curso está dedicado a explorar algunos de los resultados fundamentales en la **teoría de Ramsey**, un campo central dentro de la combinatoria moderna. Parafraseando a varios autores, existen muchos teoremas en matemáticas que afirman que, en estructuras suficientemente grandes, es inevitable encontrar **subsistemas altamente organizados**, a menudo más estructurados que el sistema original.

Un ejemplo sencillo de esta idea: en una reunión con al menos $2n - 1$ personas, al menos n de ellas tienen el mismo sexo. Otro ejemplo, más representativo de la teoría de Ramsey, plantea que en cualquier grupo lo suficientemente grande, se puede encontrar un subconjunto de tres personas que o bien **se conocen mutuamente**, o bien **son mutuamente desconocidas**. Aunque este principio parece intuitivo, su formulación rigurosa y el cálculo del menor tamaño necesario del grupo conducen directamente al **Teorema de Ramsey**, demostrado por **Frank P. Ramsey** en 1930.

Este resultado marca el inicio de la **teoría de coloraciones**, un enfoque combinatorio que ha tenido repercusiones profundas tanto dentro de las matemáticas como en campos como la informática teórica y la teoría de la información.

Contenidos del curso

1. Coloraciones combinatorias clásicas

Estudiaremos el **Teorema de Ramsey finito**, que garantiza que para toda coloración finita de subconjuntos de un conjunto grande, existe un subconjunto homogéneo (todos sus subconjuntos del tamaño dado tienen el mismo color). Analizaremos también el **Teorema de Ramsey dual**, que introduce una perspectiva inversa sobre la existencia de patrones inevitables.

2. Estructuras geométricas y aritméticas

La teoría se extiende a estructuras más ricas:

- Teorema de Hales–Jewett**: todo sistema suficientemente grande de palabras contiene una estructura combinatoria homogénea. Este resultado es clave para obtener muchos otros teoremas tipo Ramsey.
- Teorema de Van der Waerden**: toda coloración de los números naturales contiene progresiones aritméticas largas en un mismo color.

- Teorema de Folkman:** existen conjuntos tales que todas las sumas posibles de elementos distintos están en el mismo color, lo que revela organización aritmética profunda.

3. Versión infinita y compacidad

Los resultados anteriores tienen versiones infinitas con formulaciones sorprendentemente potentes:

- Teorema de Ramsey infinito:** toda coloración finita de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ contiene un conjunto infinito cuyos subconjuntos del tamaño dado están todos en un mismo color.

- Teorema de Hindman:** dado cualquier coloración finita de los naturales, existe un conjunto infinito A tal que todas las sumas finitas de elementos distintos de A están en el mismo color.

Estos teoremas, además de su contenido propio, permiten recuperar muchos resultados finitos mediante el **principio de compacidad**, una herramienta lógica fundamental que también se estudiará en el curso. Asimismo, se presentará una elegante demostración del teorema de Hindman basada en el uso de **ultrafiltros idempotentes**, introduciendo técnicas propias de la topología y la lógica combinatoria.

4. Coloraciones de subconjuntos infinitos: Teorema de Galvin–Prikry

Cerramos el curso analizando el **Teorema de Galvin–Prikry**, una generalización infinitaria profunda. En lugar de colorear subconjuntos de tamaño fijo, este teorema considera coloraciones de **todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$** . Aunque el resultado no es cierto para cualquier coloración (hay contraejemplos contruidos con el axioma de elección), **Galvin y Prikry demostraron que sí se cumple para coloraciones definibles** (por ejemplo, borelianas). Este resultado introduce los denominados **espacios de Ramsey**, un contexto abstracto en el que se pueden generalizar sistemáticamente estos fenómenos de regularidad.

Aplicaciones de la teoría de Ramsey

Pese a su origen puramente combinatorio, la teoría de Ramsey ha encontrado aplicaciones notables en numerosos campos:

- Informática teórica:** análisis de algoritmos, teoría de la computación distribuida, estructuras de datos, verificación automática.
- Teoría de grafos:** modelos de redes sociales, estructura de cliques y conjuntos independientes, algoritmos de detección de patrones.
- Teoría de números:** existencia de progresiones aritméticas en conjuntos densos o esparcidos, combinatoria aditiva, resultados en teoría analítica de los números (como el teorema de Green–Tao).
- Lógica matemática:** uso de compacidad, modelos infinitos, demostraciones con ultrafiltros, conexiones con teoría de conjuntos y cardinalidades.

- Teoría de la información:** codificación, aleatoriedad, generación de claves criptográficas, estructuras homogéneas en datos codificados.

Objetivos del curso

- Comprender la formulación y demostración de los principales teoremas de Ramsey y sus variantes.
- Analizar cómo surgen estructuras ordenadas inevitables dentro del caos aparente.
- Explorar técnicas avanzadas de demostración, como compacidad y ultrafiltros.
- Introducir los espacios de Ramsey como marco unificador para teoremas infinitos.
- Valorar las aplicaciones de estas ideas en distintas áreas de las matemáticas y la ciencia.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR ESTA ASIGNATURA

El curso es autocontenido, pero se requieren unos mínimos conocimientos de combinatoria y un poco de topología.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos
Correo Electrónico
Teléfono
Facultad
Departamento

JORGE LOPEZ ABAD (Coordinador de asignatura)
abad@mat.uned.es
91398-7234
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Jueves de 16 a 20 horas.

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

COMPETENCIAS BÁSICAS

CB6 - Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.

CB7 - Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio.

CB8 - Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios.

CB9 - Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades.

CB10 - Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

COMPETENCIAS GENERALES

CG1 - Adquirir conocimientos generales avanzados en tres de las principales áreas de las matemáticas.

CG2 - Conocer algunas de las líneas de investigación dentro de las áreas cubiertas por el Máster.

CG4 - Aprender a redactar resultados matemáticos.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

CE1 - Saber abstraer las propiedades estructurales de los objetos matemáticos, distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales. Ser capaz de utilizar un objeto matemático en diferentes contextos.

CE2 - Conocer los problemas centrales, la relación entre ellos, las técnicas más adecuadas en los distintos campos de estudio, y las demostraciones rigurosas de los resultados relevantes.

CE4 - Saber analizar y construir demostraciones matemáticas, así como transmitir conocimientos matemáticos avanzados en entornos especializados.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

* Conocimientos:

- Conocer y comprender ciertos conceptos y terminología combinatoria (coloraciones, conjuntos monocromáticos, subespacios combinatorios, ordenación combinatorio vs desorden, notación “flecha”)
- Conocer y comprender las diversas versiones del teorema de Ramsey.
- Conocer y comprender el teorema de Hales-Jewett (ordenación geométrica).
- Conocer y comprender los teoremas de Van der Waerden y Folkman (Organización aritmética).
- Conocer y comprender el teorema dual de Ramsey
- Conocer y comprender las versiones infinitas de los resultados anteriores (en particular el teorema de Galvin-Prikry)
- Conocer y comprender los argumentos de compacidad en este contexto.
- Conocer y comprender los ultrafiltros idempotentes para demostrar resultados sobre coloraciones (en particular el teorema de Ellis)

* Destrezas y habilidades.

- Saber dar diferentes ejemplos de teoremas sobre coloraciones
- Estar familiarizado con las demostraciones por inducción de algunos de los teoremas sobre coloraciones (en particular el teorema de Ramsey o Van der Waerden)
- Familiarizarse y saber utilizar correctamente los ultrafiltros idempotentes para demostrar teoremas sobre coloraciones.

- Saber utilizar diversas técnicas de la teoría descriptiva de conjuntos para demostrar el teorema de Galvin-Prikry sobre coloraciones Borelianas.

CONTENIDOS

Teoremas Clásicos finitarios

- El teorema de Ramsey clásico.
- El teorema de Hales-Jewett sobre palabras (o sobre existencia de estrategias para juegos de N-en raya.
- El teorema de Graham-Rothschild, o teorema dual de Ramsey.
- El teorema de Van der Waerden sobre existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente largas.
- El teorema de Folkman sobre sumas finitas sin repeticiones.

Teoremas Infinitarios I

- El teorema de Ramsey Infinito.
- El Teorema de Hindman.
- Ultrafiltros idempotentes.

Teoremas Infinitarios II

- El teorema de Galvin-Prikry (extensión del teorema de Ramsey clásico)
- Introducción a los espacios de Ramsey.

METODOLOGÍA

La asignatura no tiene clases presenciales. Los contenidos teóricos se imparten a distancia y de acuerdo con las normas y estructuras de soporte telemático de la enseñanza en la UNED.

Se organizarán reuniones virtuales periódicas.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	3
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	
ningún material	

Criterios de evaluación

claridad y precisión en las respuestas	
% del examen sobre la nota final	60
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	4

Comentarios y observaciones

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA PRESENCIAL Y/O LOS TRABAJOS

Requiere Presencialidad No

Descripción

La evaluación de esta asignatura se hará a través de 2 trabajos y el examen presencial.

Los dos trabajos serán:

Desarrollo de alguno de los resultados de carácter finitario que se estudian, así como posibles generalizaciones conocidas (por ejemplo el teorema de Van der Waerden y el de Szemerédi) Se deberá de entregar al final del primer tercio-mitad del curso (aproximadamente)

El segundo trabajo será desarrollar otro de los temas introducidos en el curso, esta vez de carácter infinito (por ejemplo, ultrafiltros idempotentes y el teorema de Hindman). Se deberá de entregar casi al final del curso.

Criterios de evaluación

se valorará principalmente la calidad de la argumentación y redacción del tema propuesto.

Ponderación de la prueba presencial y/o los trabajos en la nota final	cada trabajo se puntuará sobre 2 puntos y cada trabajo podrá sumar hasta 2 puntos en la nota final.
---	---

Fecha aproximada de entrega	finales de noviembre el primero y mediados de enero el segundo
-----------------------------	--

Comentarios y observaciones

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC? No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación de la PEC en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s? No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Sea

EX:= nota del examen presencial (sobre 10 puntos)

T:= suma de la nota del primer trabajo y el segundo trabajo (sobre 10 puntos; el máximo es 4)

NF:=nota final (sobre 10 puntos)

Hay varios casos:

Si EX es mayor o igual a 4, entonces $NF = \min (EX + T, 10)$

Si EX es menor a 4, entonces $NF=EX$

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9780691145426

Título: INTRODUCTION TO RAMSEY SPACES

Autor/es: Todorovic, Stevo

Editorial: : PRINCETON UNIVERSITY PRESS

ISBN(13): 9781118799666

Título: RAMSEY THEORY segunda edición edición

Autor/es: Spencer, Joel H.; Rothschild, Bruce L.; Graham, Ronald L.

Editorial: John Wiley & Sons

ISBN(13): 9789802611010

Título: TEORÍA DE RAMSEY Y ESPACIOS DE BANACH

Autor/es: Lopez-Abad, J.; Di Prisco, Carlos Augusto

Editorial: Ediciones IVIC

Además de la bibliografía básica mencionada, se seguirán unas notas personales en preparación y que contienen los resultados principales de este curso

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Hay diversas notas en la web y en su momento recomendaré algunas de ellas.

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.