23-24

MÁSTER UNIVERSITARIO EN
MATEMÁTICAS AVANZADAS

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA

COMBINATORIA DE LAS COLORACIONES

CÓDIGO 21520011

COMBINATORIA DE LAS COLORACIONES

CÓDIGO 21520011

ÍNDICE

Nombre de la asignatura	COMBINATORIA DE LAS COLORACIONES
Código	21520011
Curso académico	2023/2024
Título en que se imparte	MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS
Tipo	CONTENIDOS
Nº ETCS	7,5
Horas	187.5
Periodo	SEMESTRE 1
Idiomas en que se imparte	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

Se trata de exponer algunos resultados importantes en la *teoría de Ramsey* sobre coloraciones. Se trata de un campo matemático englobado dentro de la combinatoria.
Parafraseando a varios autores
hay numerosos teoremas en matemáticas que afirman, a grosso modo, que cualquier sistema de un cierto tipo siempre tiene un subsistema grande con más grado de organización que el sistema original.
Ilustremos esto con dos ejemplos: En una reunión con al menos *2n-1* personas, al menos *n* entre ellas tienen el mismo sexo.
El segundo es un poco más complejo: Queremos saber si en un grupo de personas $P_1,...,P_n$ podemos encontrar al menos tres P_k,P_m,P_n que se conocen entre sí, o que ninguna de ellas se conoce entre sí. El ``sentido común'' nos dice que si el grupo es suficientemente grande, esto será así. La cuestión es, primero saber si esto es siempre cierto, y si eso es así, estimar al menor de esos números *n*.
El ejemplo que acabamos de explicar es un caso particular de un principio matemático general, denominado *Teorema de Ramsey*, demostrado por el filósofo y matemático F. P. Ramsey, y que se puede decir es el origen de la teoría de las coloraciones. El teorema de Ramsey y variaciones de él ha sido muy utilizado tanto en otras áreas de la matemática como, por ejemplo, en informática teórica (estudio de algoritmos) o en teoría de la información.
También se estudiarán resultados tipo Ramsey donde el orden deseado es geométrico o aritmético, como:

•El Teorema de Hales-Jewett. Coloraciones de palabras. Organización geométrica.

•Teoremas de *Van der Waerden* y *Folkman. Existencia de progresiones aritméticas largas y muchas sumas.* Organización aritmética.

Dualizando los resultados, se estudiará el teorema de *Ramsey dual*.

Hay versiones infinitas de los resultados anteriores, aunque hay que precisar qué se quiere decir por infinita. De hecho, algunos de los teoremas presentados anteriormente son consecuencia, via un argumento de compacidad, de su versión infinita:

•El teorema de Ramsey infinito.

•El teorema de Hindman (versión infinita del resultado de Folkman)

Este resultado tiene una demostración muy elegante utilizando los *ultrafiltros idempotentes,* otro de los objetivos de este curso.
Como principio general, las versiones infinitas de los resultados implican la finita por un argumento llamado de *compacidad,* que es otro de los objetivos.
Existe también otro tipo de versiones infinitas de los resultados anteriores. Para ilustrarlo mencionaremos el Teorema de Galvin-Prikry. En el teorema de Ramsey se colorean los subconjuntos finitos de cardinalidad exactamente *d*. ¿Se puede tener un resultado similar cuando se colorean los subconjuntos infinitos de números naturales? El resultado que buscamos es el siguiente: ¿es cierto que para toda coloración finita de todos los subconjuntos infinitos de naturales en uno de los colores tenemos un conjunto infinito *A* y todos sus subconjuntos infinitos? Este resultado es falso en general, aunque la coloración mala es "artificial", al estar construida utilizando el axioma de elección. Sin embargo, el resultado de Galvin y Prikry nos dice que para coloraciones definibles (en este caso, borelianas) el resultado es cierto.
El curso finaliza analizando una demostración teorema de Galvin-Prikry, y que sirve para introducir los denominados *espacios de Ramsey.*

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR ESTA ASIGNATURA

El curso es autocontenido, pero se requieren unos mínimos conocimientos de combinatoria y un poco de topología.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	JORGE LOPEZ ABAD (Coordinador de asignatura)
Correo Electrónico	abad@mat.uned.es
Teléfono	91398-7234
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Jueves de 16 a 20 horas.

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

COMPETENCIAS BÁSICAS

CB6 - Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.
CB7 - Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio.
CB8 - Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios.
CB9 - Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades.
CB10 - Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

COMPETENCIAS GENERALES

CG1 - Adquirir conocimientos generales avanzados en tres de las principales áreas de las matemáticas.
CG2 - Conocer algunas de las líneas de investigación dentro de las áreas cubiertas por el Máster.
CG4 - Aprender a redactar resultados matemáticos.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

CE1 - Saber abstraer las propiedades estructurales de los objetos matemáticos, distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales. Ser capaz de utilizar un objeto matemático en diferentes contextos.
CE2 - Conocer los problemas centrales, la relación entre ellos, las técnicas más adecuadas en los distintos campos de estudio, y las demostraciones rigurosas de los resultados relevantes.
CE4 - Saber analizar y construir demostraciones matemáticas, así como transmitir conocimientos matemáticos avanzados en entornos especializados.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

* Conocimientos:

•Conocer y comprender ciertos conceptos y terminología combinatoria (coloraciones, conjuntos monocromáticos, subespacios combinatorios, ordenación combinatorio vs desorden, notación “flecha”)
•Conocer y comprender las diversas versiones del teorema de Ramsey.
•Conocer y comprender el teorema de Hales-Jewett (ordenación geométrica).
•Conocer y comprender los teoremas de Van der Waerden y Folkman (Organización aritmética).

•Conocer y comprender el teorema dual de Ramsey
•Conocer y comprender las versiones infinitas de los resultados anteriores (en particular el teorema de Galvin-Prikry)
•Conocer y comprender los argumentos de compacidad en este contexto.
•Conocer y comprender los ultrafiltros idempotentes para demostrar resultados sobre coloraciones (en particular el teorema de Ellis)

* Destrezas y habilidades.
•Saber dar diferentes ejemplos de teoremas sobre coloraciones
•Estar familiarizado con las demostraciones por inducción de algunos de los teoremas sobre coloraciones (en particular el teorema de Ramsey o Van der Waerden)
•Familiarizarse y saber utilizar correctamente los ultrafiltros idempotentes para demostrar teoremas sobre coloraciones.
•Saber utilizar diversas técnicas de la teoría descriptiva de conjuntos para demostrar el teorema de Galvin-Prikry sobre coloraciones Borelianas.

CONTENIDOS

Teoremas Clásicos finitarios

·El teorema de Ramsey clásico.
·El teorema de Hales-Jewett sobre palabras (o sobre existencia de estrategias para juegos de N-en raya.
·El teorema de Graham-Rothschild, o teorema dual de Ramsey.
·El teorema de Van der Waerden sobre existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente largas.
·El teorema de Folkman sobre sumas finitas sin repeticiones.

Teoremas Infinitarios I

•El teorema de Ramsey Infinito.
•El Teorema de Hindman.
•Ultrafiltros idempotentes.

Teoremas Infinitarios II

•El teorema de Galvin-Prikry (extensión del teorema de Ramsey clásico)
•Introducción a los espacios de Ramsey.

METODOLOGÍA

La asignatura no tiene clases presenciales. Los contenidos teóricos se imparten a distancia y de acuerdo con las normas y estructuras de soporte telemático de la enseñanza en la UNED.

Se organizarán reuniones virtuales periódicas.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	3
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	

ningún material

Criterios de evaluación

claridad y precisión en las respuestas

% del examen sobre la nota final	60
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	4
Comentarios y observaciones	

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA PRESENCIAL Y/O LOS TRABAJOS

Requiere Presencialidad	No
Descripción	

La evaluación de esta asignatura se hará a través de 2 trabajos y el examen presencial.
Los dos trabajos serán:
Desarrollo de alguno de los resultados de carácter finitario que se estudian, así como posibles generalizaciones conocidas (por ejemplo el teorema de Van der Waerden y el de Szemeredi) Se deberá de entregar al final del primer tercio-mitad del curso (aproximadamente)
El segundo trabajo será desarrollar otro de los temas introducidos en el curso, esta vez de carácter infinito (por ejemplo, ultrafiltros idempotentes y el teorema de Hindman). Se deberá de entregar casi al final del curso.

Criterios de evaluación

se valorará principalmente la calidad de la argumentación y redacción del tema propuesto.

Ponderación de la prueba presencial y/o los trabajos en la nota final	cada trabajo se puntuará sobre 2 puntos y cada trabajo podrá sumar hasta 2 puntos en la nota final.

Fecha aproximada de entrega	finales de noviembre el primero y mediados de enero el segundo
Comentarios y observaciones	

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?	No
Descripción	
Criterios de evaluación	
Ponderación de la PEC en la nota final	
Fecha aproximada de entrega	
Comentarios y observaciones	

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?	No
Descripción	
Criterios de evaluación	
Ponderación en la nota final	
Fecha aproximada de entrega	
Comentarios y observaciones	

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Sea

EX:= nota del examen presencial (sobre 10 puntos)

T:= suma de la nota del primer trabajo y el segundo trabajo (sobre 10 puntos; el máximo es 4)

NF:=nota final (sobre 10 puntos)

Hay varios casos:

Si EX es mayor o igual a 4, entonces NF = min (EX + T,10)

Si EX es menor a 4, entonces NF=EX

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9780691145426
Título:INTRODUCTION TO RAMSEY SPACES
Autor/es:Todorcevic, Stevo ;
Editorial:: PRINCETON UNIVERSITY PRESS

ISBN(13):9781118799666
Título:RAMSEY THEORY (segunda edición)
Autor/es:Spencer, Joel H. ; Rothschild, Bruce L. ; Graham, Ronald L. ;
Editorial:John Wiley & Sons

ISBN(13):9789802611010
Título:TEORÍA DE RAMSEY Y ESPACIOS DE BANACH
Autor/es:Lopez-Abad, J. ; Di Prisco, Carlos Augusto ;
Editorial:Ediciones IVIC

Además de la bibliografía básica mencionada, se seguirán unas notas personales en preparación y que contienen los resultados principales de este curso

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Hay diversas notas en la web y en su momento recomendaré algunas de ellas.

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.