23-24

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

# GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA

# ANÁLISIS FUNCIONAL

**CÓDIGO 21152260**

UNED

23-24

ANÁLISIS FUNCIONAL

CÓDIGO 21152260

# ÍNDICE

| | |
|---|---|
| Nombre de la asignatura | ANÁLISIS FUNCIONAL |
| Código | 21152260 |
| Curso académico | 2023/2024 |
| Título en que se imparte | MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS |
| Tipo | CONTENIDOS |
| Nº ETCS | 7,5 |
| Horas | 187.5 |
| Periodo | SEMESTRE 1 |
| Idiomas en que se imparte | CASTELLANO |

## PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

Históricamente el Análisis Funcional tiene sus raices en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, pero su desarrollo posterior engloba la teoria en un marco mas amplio: el estudio de los espacios de Banach y de los operadores definidos entre ellos. Los logros obtenidos en Análisis Funcional han permitido un avance importante en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, lo cual muestra los extrechos lazos que se dan entre ambas teorías. En este curso no se tratarán estos usos, y nos centraremos y nos centraremos en los fundamentos teóricos. Para ello se abordan algunos de los teoremas mas importantes del análisis funcional como el teorema de Hahn-Banach, el teorema de Banach-Steinhaus, el teorema de la aplicación abierta, el teorema de la gráfica cerrada y el teorema de representación de Hilbert-Schmidt.

Para abordar el estudio de los espacios de Banach es fundamental utilizar la topología débil que se construye usando los elementos del espacio dual. Para tener una intuición sobre esto, en el espacio de funciones continuas *C[0,1]* sobre el intervalo unidad, dada una sucesión de funciones continuas *(f_n)_n* de norma (del supremo) <=1, mientras que la convergencia en norma es la convergencia uniforme, la convergencia para la topología débil corresponde a la convergencia puntual.

Ejemplos destacados de espacios de Banach son los espacios de funciones $L_p$, los espacios de sucesiones $l_p$ y los espacios de Hilbert a todos los cuales se decicará una parte de este curso. Entre los operadores se hará especial incapié en los operadores compactos entre espacios de Hilbert por su peculiar representación, y que representan la versión infinito dimensional de las diagonalizaciones de ciertas matrices.

El curso finaliza con una introducción a la teoría de bases de Schauder, los sistemas de coordenadas naturales en espacios de Banach.

# REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR ESTA ASIGNATURA

Para los estudiantes que proceden del grado de matemáticas de la UNED es importante que hayan cursado la asignatura optativa de espacios normados de 4º curso.
Para estudiantes procedentes de otras universidades es importante que hayan conozcan en detalle la topologia usual de $R^n$ y de forma más general los conceptos básicos de topología y de los espacio normados.

# EQUIPO DOCENTE

| | |
|---|---|
| Nombre y Apellidos | JORGE LOPEZ ABAD (Coordinador de asignatura) |
| Correo Electrónico | abad@mat.uned.es |
| Teléfono | 91398-7234 |
| Facultad | FACULTAD DE CIENCIAS |
| Departamento | MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES |

| | |
|---|---|
| Nombre y Apellidos | VICTOR OLMOS PRIETO |
| Correo Electrónico | volmos@mat.uned.es |
| Teléfono | |
| Facultad | FACULTAD DE CIENCIAS |
| Departamento | MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES |

# HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Jorge López-Abad
Horario de Guardia: Jueves de 16 a 20 horas
Teléfono.- 913987234
Correo electrónico: abad@mat.uned.es
Despacho 2.95
Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Psicología UNED
c/ Juan del Rosal, 14
28040 Madrid

# COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

**COMPETENCIAS BÁSICAS**
CB6 - Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación
CB7 - Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio
CB8 - Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada,

incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios

CB9 - Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades

CB10 - Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

**COMPETENCIAS GENERALES**

CG1 - Adquirir conocimientos generales avanzados en tres de las principales áreas de las matemáticas.

CG2 - Conocer algunas de las líneas de investigación dentro de las áreas cubiertas por el Máster.

CG4 - Aprender a redactar resultados matemáticos.

**COMPETENCIAS ESPECÍFICAS**

CE1 - Saber abstraer las propiedades estructurales de los objetos matemáticos, distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales. Ser capaz de utilizar un objeto matemático en diferentes contextos.

CE2 - Conocer los problemas centrales, la relación entre ellos, las técnicas más adecuadas en los distintos campos de estudio, y las demostraciones rigurosas de los resultados relevantes.

CE4 - Saber analizar y construir demostraciones matemáticas, así como transmitir conocimientos matemáticos avanzados en entornos especializados.

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE

El objetivo principal que se pretende es el de dar a los alumnos una formación avanzada mínima en análisis funcional.

**Conocimientos.**

•Conocer y comprender bien el teorema de Hahn-Banach en sus dos versiones, la analítica y la geométrica.

•Conocer y comprender bien los otros teoremas fundamentales del análisis funcional:

•Teorema de Banach-Steinhaus

•Teorema de la aplicación abierta

•Teorema de la gráfica cerrada

•Comprender bien las topologías débiles en espacios normados.

•Comprender bien la reflexividad de un espacio.

•Comprender bien las propiedades fundamentales de los espacios de Lebesgue

•Comprender bien las propiedades fundamentales de los espacios de Hilbert y entender correctamente las diferencias principales con un espacio de Banach arbitrario.

•Conocer y comprender bien los principios básicos de los operadores compactos y en particular el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos en un espacio de

Hilbert.

- Conocer y comprender bien la noción de base de Schauder y su uso para caracterizar la reflexividad.

**Destrezas y habilidades.**

Saber utilizar los anteriores conocimientos en ejemplos particulares.

## CONTENIDOS

### 0.-Espacios métricos, normados.

Repaso de nociones previas: espacio vectorial y norma, bolas y conjuntos acotados, espacio de Banach y espacio dual, espacio producto y espacio cociente, medida de Lebesgue,

### 1.-El teorema de Hahn-Banach

Se presenta el Teorema de Hahn-Banach en sus formas analítica y geométrica, que son equivalentes, con demostraciones y consecuencias de distintos resultados.

### 2.-Teoremas fundamentales

- Teorema de Banach-Steinhaus
- Teorema de la aplicación abierta
- Teorema de la gráfica cerrada

### 3.-Topologías Débiles

- Topología débil
- Topología débil-*
- Reflexividad

### 4.-Espacios Lp

- Propiedades elementales de los espacios $L_p$
- Dualidad en los espacios $L_p$
- Convolución y regularización

- Criterio de compacidad fuerte en $L_p$

5.-Espacios de Hilbert

- Propiedades elementales. Proyección sobre un convexo cerrado
- Representación de funcionales.
- Bases ortornormales

6.-Operadores compactos

- La teoria de Riesz-Fredholm
- Espectro de un operador compacto
- Descomposición espectral de los operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert

7.-Espacios de sucesiones

- Espacios clásicos de Sucesiones
- Bases de Schauder
- Teoría de James de bases y reflexividad

## METODOLOGÍA

Para alcanzar los resultados de aprendizaje planteados en este curso el estudiante deberá empezar repasando los contenidos teóricos propuestos en el material de apoyo que se facilita a traves de la plataforma virtual, para poder abordar el estudio de los contenidos teoricos del texto base.
Las dudas y dificultades que el estudiante vaya encontrando serán atendidas por el equipo docente a través de los foros del curso virtual.

## SISTEMA DE EVALUACIÓN

**TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL**

| | |
|---|---|
| Tipo de examen | Examen de desarrollo |
| Preguntas desarrollo | 3 |
| Duración del examen | 120 (minutos) |
| Material permitido en el examen | |

Ninguno.

Criterios de evaluación

claridad y precisión en las respuestas

| | |
|---|---|
| % del examen sobre la nota final | 100 |

| | |
|---|---|
| Nota del examen para aprobar sin PEC | 5 |
| Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC | 10 |
| Nota mínima en el examen para sumar la PEC | |
| Comentarios y observaciones | |

Tiene dos horas de duración. Se realiza en los centros asociados, dentro de los exámenes de la UNED. Habrá una en enero o febrero, y los que suspendan tendrán otra oportunidad en septiembre.

**Cada examen constará de 3 ejercicios o preguntas que podrán ser de tipo práctico (resolución de problemas y aplicaciones de la teoría) o teórico (cuestiones o demostraciones de resultados teóricos, y preguntas directamente relacionadas con ellos). También se podrán pedir ejemplos y contraejemplos.**

**En el curso virtual, o en los foros del mismo, se ponen exámenes o ejercicios resueltos de cursos anteriores.**

**CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA PRESENCIAL Y/O LOS TRABAJOS**

| | |
|---|---|
| Requiere Presencialidad | No |
| Descripción | |

La evaluación de esta asignatura se hará a través de 2 trabajos y el examen presencial.

Los dos trabajos serán:

Una lista de tres ejercicios que serán el estudio de casos particulares de teoremas principales del curso. Se deberá de entregar a finales de noviembre.

El segundo trabajo será desarrollar otro de los temas introducidos en el curso. Se deberá de entregar casi al final del curso.

| | |
|---|---|
| Criterios de evaluación | |
| Ponderación de la prueba presencial y/o los trabajos en la nota final | cada trabajo se puntuará sobre 2 puntos y cada trabajo podrá sumar hasta 2 puntos en la nota final. |
| Fecha aproximada de entrega | finales de noviembre el primero y mediados de enero el segundo |
| Comentarios y observaciones | |

**PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)**

| | |
|---|---|
| ¿Hay PEC? | No |
| Descripción | |
| Criterios de evaluación | |
| Ponderación de la PEC en la nota final | |
| Fecha aproximada de entrega | |
| Comentarios y observaciones | |

**OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES**

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s? No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

**¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?**

Sea

EX:= nota del examen presencial (sobre 10 puntos)

T:= suma de la nota del primer trabajo y el segundo trabajo (sobre 10 puntos; el máximo es 4)

NF:=nota final (sobre 10 puntos)

**Hay varios casos:**

Si EX es mayor o igual a 4, entonces NF = min ( EX + T,10 )

Si EX es menor a 4, entonces NF=EX

# BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):
Título:ANÁLISIS FUNCIONAL. TEORÍA Y APLICACIONES
Autor/es:Haïm Brezis ;
Editorial:ALIANZA EDITORIAL

ISBN(13):9783319315553
Título:TOPICS IN BANACH SPACE THEORY
Autor/es:Kalton, Nigel ; Albiac, Fernando ;
Editorial:Springer

Se pondrá a disposición del estudiante unos apuntes propios.

El libro principal es el Brezis que se utiliza para todos los temas, salvo el último, que no está cubierto. Para el tema de bases se utilizará el Albiac-Kalton (partes de los capítulos 1-3).

# BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9788436223316
Título:ANÁLISIS MATEMÁTICO V ([1ª ed., 1ª reimp.])
Autor/es:
Editorial:Universidad Nacional de Educación a Distancia

## RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

El principal medio de apoyo al estudio es la tutoría virtual que dispone de foros por medio de los cuales el estudiante podrá contactar con el Equipo Docente de la asignatura así como con los demás estudiantes matriculados en el curso.
Otras formas de contactar con el Equipo Docente se detallan en el apartado "horario de atención al estudiante"

## IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.